Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Elżbieta Adamus

Zadanie domowe nr 5 - Odwzorowania liniowe

Zadanie 1. *Czy odwzorowanie f jest liniowe?*

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (7x + y + 7, 7x - y)$
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x + y + z$
c) $f : M_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ f(A) = \det(A)$
d) $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R}),\ f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$

Zadanie 2. *Dane jest odwzorowanie liniowe*

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = (x + 2y + z - t, x + 2z + t, 2x + y + 3t).$$

a) Wyznacz obraz $Im\varphi$ oraz jądro $Ker\varphi$ odwzorowania φ, ich bazy i wymiary.
b) Podaj własności φ (monomorfizm, epimorfizm).

Zadanie 3. *Dane jest odwzorowanie liniowe*

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x], \quad f(p)(x) = (3 - x)p''(x) + 4p'(x).$$

a) Wyznacz macierz f w bazach standardowych przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ oraz $\mathbb{R}_1[x]$.
b) Wyznacz $Kerf$, Imf, określ ich bazy i wymiary.
c) Podaj własności f (monomorfizm, epimorfizm).

Zadanie 4. *Niech U, V to przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$, zaś $\varphi : U \to V$ odwzorowanie liniowe. Macierz A odwzorowania φ w pewnych bazach ma postać* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. *Wyznacz* $\dim Ker(\varphi)$.

Zadanie 5. *Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dame jest za pomocą następującego przyporządkowania.*

$$f(1, 1, 1) = (2, 2), \quad f(1, 0, 1) = (1, 0), \quad f(0, 1, 1) = (1, 1)$$

a) Podaj wzór odwzorowania f.
b) Wyznacz macierz $A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ tego odwzorowania w bazach

$$\mathcal{B} = \Big(b_1 = (3, 1, 1), b_2 = (5, 1, 6), b_3 = (4, -1, 2)\Big), \qquad \mathcal{C} = \Big(c_1 = (-1, 1), c_2 = (1, 0)\Big).$$

c) Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{C}' = \Big(c_1' = (1, 1), c_2' = (2, 1)\Big)$. Wyznacz macierz przejścia od bazy $\mathcal{C}$ do bazy $\mathcal{C}'$.
d) Wykorzystując macierz P wyznacz współrzędne wektora $v \in \mathbb{R}^2$ w bazie $\mathcal{C}'$, jeżeli $v = [2, 5]_{\mathcal{C}}$.

Zadanie 6. *Macierz A odwzorowania liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ w bazach kanonicznych przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ ma postać* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Wyznacz macierz* $A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, *gdy*
$\mathcal{B} = \Big(b_1 = (1,1), b_2 = (2,1)\Big), \mathcal{C} = \Big(c_1 = (1,2,0), c_2 = (2,3,0), c_3 = (0,0,1)\Big)$.

Zadanie 7. *Wyznacz macierz* $A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ *odwzorowania liniowego* $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ *w bazie* $\mathcal{B}'\Big(b_1' = 1, b_2' = -5x\Big)$, *jeżeli* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ *to macierz tego odwzorowania w bazie* $\mathcal{B} = \Big(b_1 = 1, b_2 = x\Big)$.

Zadanie 8. *Dane jest odwzorowanie liniowe* $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. *W przestrzeniach* $\mathbb{R}^4$ *i* $\mathbb{R}^3$ *rozważamy odpowiednio bazy* $\mathcal{B} = \Big(b_1 = (1,1,1,1), b_2 = (1,1,1,0), b_3 = (1,1,0,0), b_4 = (1,0,0,0)\Big)$ *oraz* $\mathcal{C} = \Big(c_1 = (0,-1,0), c_2 = (1,0,0), c_3 = (1,1,1)\Big)$.

a) Nie wyznaczając wzoru odwzorowania φ, a posługując się jedynie macierzą A' wyznacz obraz wektora $v = (5,0,1,0)$ poprzez φ.

$$A' = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Podaj wzór odwzorowania φ.

Zadanie 9. *Dane są odwzorowania liniowe f i g. Za pomocą rachunku macierzowego wyznacz wzór odwzorowania $h = g^2 \circ f$ oraz $h(1,2,0)$.*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x - y + z, 2y + z), \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = (2x + y, x - y)$$

Zadanie 10. *Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.*

Niech $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ będzie odwzorowaniem liniowym.

a) *Jeśli $Ker\varphi = \{0\}$, to φ jest izomorfizmem.*

b) *Jeśli $Ker\varphi = \{0\}$, to układ wektorów $\{\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)\}$ jest liniowo niezależny.*

c) *Macierz reprezentująca endomorfizm φ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ jest macierzą kwadratową stopnia 3.*