

ALGEBRA - Kartkówka 2

Łącznie można otrzymać 30 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (7,5 pkt) Dany jest układ równań

$$\begin{cases} px_1 + 5x_2 + (p+5)x_3 + 10x_4 = 20 \\ px_1 + px_2 + 10x_4 = 2p + 10 \\ 2px_1 + (p+5)x_2 + (10p+50)x_3 + 19px_4 = 2p + 539 \end{cases}.$$

Określ ilość rozwiązań w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$. W przypadku układu nieoznaczonego podaj liczbę parametrów.

Zadanie 2. (5 pkt) Dane są macierze nieosobliwe $A, B, C, D \in M_4(\mathbb{R})$.

Macierz A powstaje z macierzy D poprzez wykonanie następujących operacji: zamiany miejscami kolumny pierwszej z kolumną trzecią, pomnożenia trzeciego wiersza przez $\sqrt{2}$ oraz odjęcie od wiersza drugiego wiersza czwartego.

Ponadto wiadomo, że $\det D = 8$ oraz $\det(CB) = \frac{1}{4}$.

Oblicz wyznacznik macierzy $M = \frac{1}{2}A^T B^{-1}C^{-1}$.

Zadanie 3. (10 pkt) Rozwiąż równanie macierzowe

$$B^9(10I - X)^{-1} - B^8A^T = \mathbf{0}$$

i podaj macierz X wiedząc, że $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ oraz

$$B = [b_{ij}], \text{ gdzie } b_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ \frac{i+j+1}{i} & ; i = j \end{cases}, \text{ zaś } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. (7,5 pkt) Dane są prosta l i płaszczyzna π .

$$l : x - 3 = 10 - 2y = 2z + 12 \quad \pi : 2x + 3y - z + 1 = 0$$

Wyznacz równanie krawędziowe i równanie parametryczne prostej l' będącej rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π .