

ALGEBRA - Kartkówka 3

Proszę nie zapominać o niezbędnych komentarzach.
Łącznie można otrzymać 50 punktów. Powodzenia.

Zadanie 1. (2+2+4=8 pkt) Podaj i uzasadnij odpowiedzi na poniższe pytania.

- a) Czy $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xz = 0 \vee yz = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową \mathbb{R}^3 ?
- b) Czy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane wzorem $\varphi(x) = (x + 1, 2x, -3x)$ jest liniowe?
- c) Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ podany układ wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

$$p = -ax + 1 \quad q = -2x^2 - 4x + 1 \quad r = a^2x^2 + ax + 1$$

Zadanie 2. (4 pkt) Układ macierzy $\{A, B\}$ uzupełnij do bazy przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. (7+7+6=20 pkt) Odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest za pomocą przyporządkowania

$$\varphi(1, 1, 0, 0) = (3, -1, 2), \quad \varphi(0, 1, -1, 0) = (2, 5, 8), \quad \varphi(-1, 0, 2, 0) = (-1, 2, 4), \quad \varphi(0, 0, 0, 1) = (4, 1, 0).$$

a) Wyznacz macierz A' odwzorowania φ w bazach

$$\mathcal{B} = \left((1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (-1, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 1) \right), \quad \mathcal{C} = \left((9, -3, 6), (-1, 2, 4), (3, 3, 4) \right),$$

a następnie za pomocą macierzy A' oblicz wektor $\varphi(1, 0, 1, 0)$ i podaj jego współrzędne w bazie kanonicznej przestrzeni \mathbb{R}^3 .

b) Podaj wzór odwzorowania φ .

c) Wyznacz obraz φ . Określ wymiar jądra i wymiar obrazu φ . Czy φ jest monomorfizmem/epimorfizmem?

Zadanie 4. (18pkt) Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i określ wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

$$\varphi \in \text{End}(M_2(\mathbb{R})), \quad \varphi(B) = B + B^T$$