Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ.

Przykład 8.2.14. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P.

$$f \in End(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-$$
$$t)^2((1-t)^2 - 1) = (2-t)^2(t^2 - 2t) = -t(2-t)^3$$
$Spec(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}$, $k_1 = 1$ $k_2 = 3$, $\dim E_0 = 1$, $1 \leq \dim E_2 \leq 3$

$E_{\lambda_1} = E_0 = \operatorname{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$
Niech $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ 2d & = 0 \end{cases}$$

Zatem $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ oraz $E_0 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \operatorname{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$
$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}$, $O_{2\times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$

$$(A - 2I)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \ a, b, d \in \mathbb{R}$$

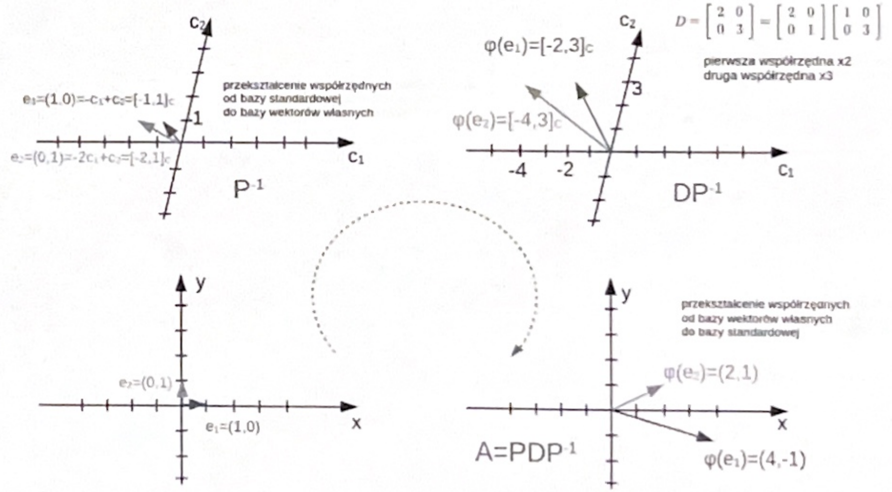
$$E_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim E_2 = 3$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 8.2.15. Rozważmy $\varphi \in End(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$.
Możemy wyliczyć $Spec(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.
Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.
Układ $\mathcal{C} = (v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1))$ jest bazą wektorów własnych.
$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = P_{\mathcal{B}_k^2\to\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Obliczamy $P^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$
$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



Zad. 1

a) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) : xz=0 \vee yz=0\}$ To nie podprzestrzeń

$(0,1,1)\in\mathcal{U} \wedge (1,0,1)\in\mathcal{U}$ $(0,1,1)+(1,0,1)=(1,1,2)\notin\mathcal{U}$

b) $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $\varphi(x)=(x+1,\ 2x,\ -3x)$ Nie jest liniowe, bo wtem $\varphi(0)\neq(0,0,0)$

c)

$$\det\begin{bmatrix}1 & -a & 0\\ 1 & -4 & -2\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & -a & 0\\ 0 & a-4 & -2\\ 0 & 2a & a^2\end{bmatrix} = (a-4)a^2+4a = a^3-4a^2+4a =$$

$$= a(a^2-4a+4) = a(a-2)^2 \neq 0 \iff a\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$$

3 wektory $\wedge$ $\dim\mathbb{R}_2[x]=3$ Jeśli są lin. niezależne, stanowią bazę

Zad. 2

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ $\dim M_2(\mathbb{R})=4$

$$r\begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 1\\ -2 & -6 & 7 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{bmatrix} \xrightarrow{w_2+2w_1} \begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 21 & 3\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{bmatrix}$$ $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Zad. 3

$$\begin{cases}\overset{b_1}{\varphi(1,1,0,0)} = \varphi(e_1)+\varphi(e_2) = (3,-1,2)\\ \varphi(0,1,-1,0) = \varphi(e_2)-\varphi(e_3) = (2,5,8)\\ \varphi(-1,0,2,0) = -\varphi(e_1)+2\varphi(e_3) = (-1,2,4)\\ \varphi(0,0,0,1) = \varphi(e_4) = (4,1,0)\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\-1&0&2&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{vmatrix} \neq 0$$

a) 7p

$\varphi(b_1) = (3,-1,2) = \frac{1}{3}(9,-3,6) = \frac{1}{3}c_1$

$\varphi(b_2) = (2,5,8) = c_2+c_3$

$\varphi(b_3) = c_2$

$\varphi(b_4) = (4,1,0) = c_3-c_2$

$$A' = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$v = (1,0,1,0)_{\mathcal{B}_{st}^4} = b_1-b_2 = [1,-1,0,0]_{\mathcal{B}}$ $A'\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$\varphi(1,0,1,0) = \frac{1}{3}c_1 - c_2 - c_3 = \frac{1}{3}(9,-3,6) - (-1,2,4) - (3,3,4) =$

$= (3,-1,2) - (2,5,8) = (1,-6,-6)_{\mathcal{B}_{st}^3}$

b) 7p

~~$\varphi(e_1)+\varphi(e_1) = (3,-1,2)-(2,5,8)$~~

~~$\varphi(e_2)+2\varphi(e_3) =$~~ $\varphi(e_1) = (3,-1,2)-\varphi(e_2) \wedge \varphi(e_3) = \varphi(e_2)-(2,5,8)$

$(-1,2,4) = -\varphi(e_1)+2\varphi(e_3) = (-3,1,-2)+\varphi(e_2)+2\varphi(e_2)-(4,10,16) =$

$= 3\varphi(e_2)+(-7,-9,-18) \Rightarrow 3\varphi(e_2) = (-1,2,4)+(7,9,18) = (6,11,22)$

$\varphi(e_2) = (2,\frac{11}{3},\frac{22}{3})$ $\varphi(e_1) = (3,-1,2)-(2,\frac{11}{3},\frac{22}{3}) = (1,-\frac{14}{3},-\frac{16}{3})$

$\varphi(e_3) = (2,\frac{11}{3},\frac{22}{3})-(2,5,8) = (0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$

$\varphi(x,y,z,t) = x\varphi(e_1)+y\varphi(e_2)+z\varphi(e_3)+t\varphi(e_4) = x(1,-\frac{14}{3},-\frac{16}{3})+y(2,\frac{11}{3},\frac{22}{3})+$

$+z(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})+t(4,1,0) = (x+2y,\ -\frac{14}{3}x+\frac{11}{3}y-\frac{4}{3}z,\ -\frac{16}{3}x+\frac{22}{3}y-\frac{2}{3}z)$

c) 6p

$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{lin}\{(1,-\frac{14}{3},-\frac{16}{3}),\ (2,\frac{11}{3},\frac{22}{3}),\ (0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})\} = \operatorname{lin}\{(3,-14,-16),(6,11,22),(0,4,2)\}$

$$\begin{vmatrix}3&-14&-16\\6&11&22\\0&4&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&-14&-16\\0&39&54\\0&4&2\end{vmatrix} \neq 0$$ $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3 \rightarrow$ epimorfizm

$\dim\operatorname{Ker}\varphi = 4-3 = 1$ nie monomorfizm