

---

## Zadanie domowe nr 5 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej - część II

---

**Zadanie 1.** Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = \frac{e^x + 2x^2 + 7|x|}{e^x + |7-x|}$ .

**Zadanie 2.** Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema lokalne funkcji  $f$ .

$$a) f(x) = \ln(\log_x(\ln x)) \quad b) f(x) = \begin{cases} -1 - x^3 & ; x \leq 0 \\ 2x - x^2 & ; x > 0 \end{cases}$$

**Zadanie 3.** Wyznacz ekstrema lokalne funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ .

**Zadanie 4.** a) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji we wskazanym przedziale.

$$f(x) = \ln(\cos x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

b) Czy funkcja  $g$  osiąga wartość najmniejszą i wartość największą w swojej dziedzinie? Jeśli tak, podaj je.

$$g(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$$

**Zadanie 5.** Określ przedziały wypukłości / wklęsłości funkcji i wskaż punkty przegięcia.

$$f(x) = x - \cos x - \frac{1}{8} \sin 2x$$

**Zadanie 6.** Narysuj przykładowy wykres funkcji  $f$  spełniającej równocześnie wszystkie podane warunki. Oznacz na rysunku ekstrema lokalne i punkty przegięcia.

- $f(-2) = f(3) = f(6) = 0$ ,  $f(5) = 1$ ,  $f(0) = 2$
  - $f$  jest ciągła na  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
  - $f'(6) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2$
  - $f'(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty, -2)$  oraz  $x \in (0, 4)$  oraz  $x \in (5, \infty)$
  - $f'(x) > 0$  dla  $x \in (-2, 0)$  oraz  $x \in (4, 5)$
  - $f''(x) < 0$  dla  $x \in (3, 4)$  oraz  $x \in (4, 6)$
  - $f''(x) > 0$  dla  $x \in (-\infty, 0)$  oraz  $x \in (0, 3)$  oraz  $x \in (6, \infty)$
-

## Zadania nieobowiązkowe

**Zadanie 7.** Dobierz parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  w taki sposób, by zachodziła poniższa równość.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

**Zadanie 8.** Dana jest funkcja  $f \in C^2(\mathbb{R})$  taka, że  $x = 4$  oraz  $x = 11$  to jej jedyne punkty stacjonarne w przedziale  $[0, 15]$  i ponadto

$$f(0) = 1, f(4) = -2, f(11) = 4, f(15) = -1, f'(0) = -1, f'(15) = -2, \forall x \in [0, 15] |f''(x)| \leq 1.$$

Niech  $g(x) = 3f(x) - (f'(x))^2$ .

a) Uzasadnij, że podane informacje są wystarczające do wyznaczenia wartości najmniejszej i wartości największej funkcji  $g$  w przedziale  $[0, 15]$  i wyznacz te wartości.

b) Uzasadnij, że istnieje punkt  $c \in (0, 15)$  taki, że  $f'(c) = -\frac{1}{2}$ .

**Zadanie 9.** Na stronicy książki tekst drukowany powinien zajmować  $s \text{ cm}^2$ . Marginesy górny i dolny powinny mieć po  $a \text{ cm}$ , zaś marginesy lewy i prawy po  $b \text{ cm}$ . Jeśli brać pod uwagę tylko oszczędność papieru, to jakie powinny być najbardziej dogodne wymiary strony?