Zadanie domowe nr 5

ZAD.1 Asymptoty

$$f(x)=\frac{e^x+2x^2+7|x|}{e^x+|7-x|}$$

$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ e^x+|7-x|>0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ brak asymptot pionowych

- As. ukośna w $+\infty$: $y=Ax+B$

$$|7-x|=\begin{cases}7-x & ; x\leq 7\\ -7+x & ; x>7\end{cases}$$

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2x^2+7|x|}{x\left(e^x+|7-x|\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2x^2+7x}{xe^x+x^2-7x}\underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1+2\overset{\to 0}{\boxed{\frac{x^2}{e^x}}}+7\cdot\overset{\to 0}{\boxed{\frac{x}{e^x}}}}{\underset{\infty}{\left(x\right.}+\underset{0}{\boxed{\frac{x^2}{e^x}}}-7\cdot\underset{0}{\left.\boxed{\frac{x}{e^x}}\right)}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=0$$

$$B=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-Ax\right]\underset{A=0}{=}\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2x^2+7x}{e^x+x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2\frac{x^2}{e^x}+7\frac{x}{e^x}}{1+\frac{x}{e^x}-\frac{7}{e^x}}=1$$

$y=1$ asymptota pozioma w $+\infty$

- As. ukośna w $-\infty$: $y=Cx+D$

$$C=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+2x^2+7|x|}{x\left(e^x+|7-x|\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\to 0}{\boxed{e^x}}+\overset{\to\infty}{2x^2}-7x}{\underset{\to 0}{\underbrace{\underset{-\infty}{x}\underset{0}{e^x}}}-\underset{\infty}{x^2}+7x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\to 0}{\boxed{\frac{e^x}{x^2}}}+2-\overset{\to 0}{\boxed{\frac{7}{x}}}}{\underset{0}{\boxed{\frac{e^x}{x}}}-1+\underset{\to 0}{\boxed{\frac{7}{x}}}}=-2$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}xe^x\underset{[\infty\cdot 0]}{=}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{H}{=}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0\end{aligned}}$$

$$D=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-Cx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+2x^2-7x}{e^x-x+7}+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+\cancel{2x^2}-7x+2xe^x-\cancel{2x^2}+14x}{e^x-x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\to 0}{2xe^x}+\overset{\to 0}{e^x}+\overset{\to\infty}{7x}}{\underset{0}{e^x}-\underset{\infty}{x}+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\overset{\to 0}{e^x}+\overset{\to 0}{\frac{e^x}{x}}+7}{\underset{0}{\frac{e^x}{x}}-1+\underset{0}{\frac{7}{x}}}=-7$$

$y=-2x-7$ asymptota ukośna w $-\infty$

ZAD.2 Monotoniczność i ekstrema lokalne

a) $f(x)=\ln\left(\log_x(\ln x)\right)$ $D_f=?$

$x>0$

$\ln x>0\Rightarrow x>1$

$$\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$f(x)=\ln\left[\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right]$ $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}>0 \underset{\ln x>0}{\Rightarrow} \ln(\ln x)>0,\ \ln x>1,\ x>e$

$D_f=(e,\infty)$

f ciągła w swojej dziedzinie

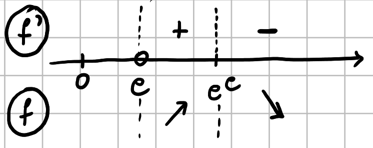
$$f'(x)=\frac{\cancel{\ln x}}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\cancel{\ln x}-\ln(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^{\cancel{2}}x}=\frac{\overset{>0}{\boxed{\frac{1}{x}}}\left(1-\ln(\ln x)\right)}{\underbrace{\ln x}_{>0}\cdot\underbrace{\ln(\ln x)}_{>0}}>0 \Leftrightarrow 1-\ln(\ln x)>0 \Leftrightarrow$$

z założenia

$$\boxed{D_f=D_{f'}}$$

$\Leftrightarrow 1>\ln(\ln x),\ e>\ln x,\ e^e>x$

Wnioski:



$f\nearrow$ dla $x\in(e,e^e)$

$f\searrow$ dla $x\in(e^e,\infty)$

w $x=e^e$ f osiąga maksimum lokalne równe $f(e^e)$

b) $f(x)=\begin{cases}-1-x^3 & ; x\leq 0\\ 2x-x^2 & ; x>0\end{cases}$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(0)=-1$ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1-x^3)=-1$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x-x^2)=0$ $\Rightarrow$ f nie jest ciągła w $x=0$

$f'(x)=\begin{cases}-3x^2 & ; x<0\\ 2-2x & ; x>0\end{cases}$

$\Rightarrow$ f nie jest różniczkowalna w $x=0$

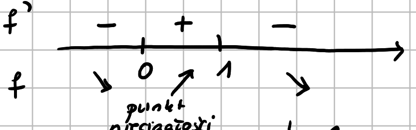
$f'(0)$ nie istnieje

Dla $x<0$ $f'(x)=-3x^2<0 \Rightarrow f\searrow\ x\in(-\infty,0)$

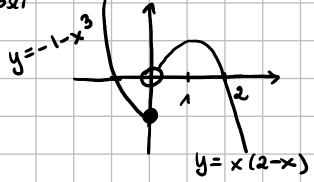
Dla $x>0$ $f'(x)=2-2x>0 \Leftrightarrow 2>2x,\ 1>x \Rightarrow$ $f\nearrow\ x\in(0,1)$

$f\searrow\ x\in(1,\infty)$

WNIOSKI



w $x=1$ f jest ciągła, f' zmienia znak $\Big) \Rightarrow$ w $x=1$ f osiąga maksimum lokalne równe $f(1)=1$



$f(0)=-1$

$x<0$ $f(x)=-1\underbrace{-x^3}_{>0}>-1$

$0<x<1$ $f(x)=2x-x^2=1-(\underbrace{x-1}_{\in(0,1)})^2>0$

$\Big) \Rightarrow$ w $x=0$ f osiąga minimum lokalne równe $f(0)=-1$

ZAD.3 Ekstrema lokalne

$f(x)=\begin{cases}e^{1/x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$, $f(0)=0$ $\lim_{x\to 0^+}e^{1/x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-}e^{1/x}=0$ f nie jest ciągła w $x=0$

$\Rightarrow$ nie istnieje $f'(0)$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$; $x\neq 0$ $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\forall x\neq 0$ $f'(x)\neq 0$ $\Rightarrow$ ekstremum <u>może</u> wystąpić jedynie w $x=0$

$f(0)=0\ \wedge\ \forall x\neq 0\ f(x)=e^{1/x}>0 \Rightarrow$ w $x=0$ f osiąga minimum lokalne

Zadanie domowe nr 5

ZAD. 4 Wartość najmniejsza/największa

a) $f(x) = \ln(\cos x)$; $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ I , IV ćw. $\Rightarrow \cos x > 0$

f ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych) w przedziale domkniętym $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

dla mocy tw. Weierstrassa f osiąga kresy w $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

1) Wnętrze tj. $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ $f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \begin{matrix} k=0 \\ x=0 \end{matrix}$ $f(0) = \ln 1 = 0$

2) Brzeg $f(-\frac{\pi}{4}) = \ln(\cos(-\frac{\pi}{4})) = \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\frac{\pi}{3}) = \ln(\cos\frac{\pi}{3}) = \ln\frac{1}{2}$

$0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln\frac{1}{\sqrt{2}} < \ln 1 = 0 \Rightarrow$ W. najmniejsza to $f(\frac{\pi}{3}) = \ln\frac{1}{2}$

W. największa to $f(0) = 0$

b) $g(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ $D_g = \mathbb{R}$ g - ciągła na $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ nie jest zbiorem ograniczonym (Nie możemy korzystać z tw. Weierstrassa)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3-x} & ; 2 > x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3-x} & ; 0 > x \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} & ; x > 2 \\ \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} & ; 2 > x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} & ; 0 > x \end{cases}$$

$\Rightarrow g'(x) < 0$ dla $x > 2$, $g \searrow$ w $(2, \infty)$

$\Rightarrow g'(x) > 0$ dla $x < 0$, $g \nearrow$ w $(-\infty, 0)$

Dla $x \in (0,2)$ $g'(x) = \frac{1}{(3-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(1+x)^2} = \frac{-8+8x}{(3-x)^2(1+x)^2} > 0 \iff -8+8x > 0$, $8x > 8$, $x > 1$

$\Rightarrow g'(x) > 0$ dla $x \in (1,2)$; $g \nearrow$ w $(1,2)$

$g'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$; $g \searrow$ w $(0,1)$

g' + | − | + | −

g ↗ 0 ↘ 1 ↗ 2 ↘

$g \in C(\mathbb{R})$
w x = 0 i x = 2 max. lok.
w x = 1 min. lok.

$g(0) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ $g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $g(2) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

WNIOSKI : wartość największa to $\frac{4}{3}$, osiągana dla $x = 0$ oraz $x = 2$

Brak wartości najmniejszej (w całej dziedzinie)

ZAD 5 Wklęsłość/wypukłość i punkty przegięcia

$f(x) = x - \cos x - \frac{1}{8}\sin 2x$

$D_f = \mathbb{R}$, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 + \sin x - \frac{1}{8} \cdot 2\cos 2x = 1 + \sin x - \frac{1}{4}\cos 2x$ $f''(x) = \cos x - \frac{1}{4} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$f''(x) = \cos x + \sin x \cos x = \underbrace{(1+\sin x)}_{\geq 0} \cos x > 0 \iff \cos x > 0 \iff x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

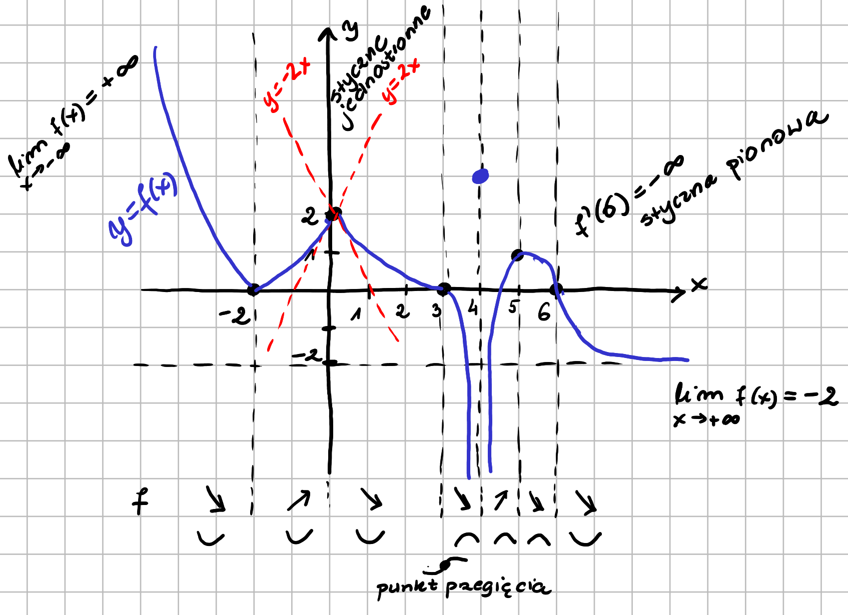
f wypukła w każdym z tych przedziałów

$f''(x) < 0 \iff \cos x < 0 \iff x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

f wklęsła w każdym z tych przedziałów

f ciągła w $\mathbb{R}$ $\Rightarrow P_k = (\frac{\pi}{2} + k\pi, f(\frac{\pi}{2} + k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$ to punkty przegięcia wykresu funkcji f

ZAD.6



Zadanie domowe nr 5

ZAD. 7

$a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $\lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2x+1}}_{f(x)} - ax - b) = 0$

Dobrać a, b tak, by prosta $y = ax+b$ była asymptotą ukośną w $+\infty$ wykresu funkcji f.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}}{x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x)-ax] = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}-2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} + |x+1| - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} + x + 1 - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x + 1\right) \underset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}_{0}} + 1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)} = \frac{3}{2}$$

Odp. $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$

ZAD. 8

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 1$, $f(4) = -2$, $f(11) = 4$, $f(15) = -1$ $\qquad g(x) = 3f(x) - (f'(x))^2$

$f'(0) = -1$, $f'(15) = -2$

$x = 4$, $x = 11$ jedyne punkty stacjonarne w $[0,15]$

$\forall x \in [0,15] \quad |f''(x)| \leq 1$

a) $f \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow g \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Na mocy tw. Weierstrasa g osiąga kresy w $[0,15]$

$$g'(x) = 3f'(x) - 2\cdot f'(x) f''(x) = f'(x)\cdot[3 - 2f''(x)] > 0 \iff \begin{cases} f'(x) > 0 \\ 3 - 2f''(x) > 0 \end{cases} \lor \begin{cases} f'(x) < 0 \\ 3 - 2f''(x) < 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f''(x) < \frac{3}{2} \end{cases} \lor \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f''(x) > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\forall x \in [0,15] \quad -1 \leq f''(x) \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} g'(x) > 0 \iff f'(x) > 0 \\ g'(x) < 0 \iff f'(x) < 0 \\ g'(x) = 0 \iff f'(x) = 0 \end{cases}$$

Wnętrze: $x \in (0,15)$ $\quad g'(x) = 0 \iff f'(x) = 0 \iff x = 4 \lor x = 11$

$g(4) = 3f(4) - (f'(4))^2 = 3\cdot(-2) - 0 = -6$

$g(11) = 3f(11) - (f'(11))^2 = 3\cdot 4 = 12$

Brzeg: $g(0) = 3f(0) - (f'(0))^2 = 3\cdot 1 - (-1)^2 = 2$

$g(15) = 3\cdot f(15) - (f'(15))^2 = 3\cdot(-1) - (-2)^2 = -7$

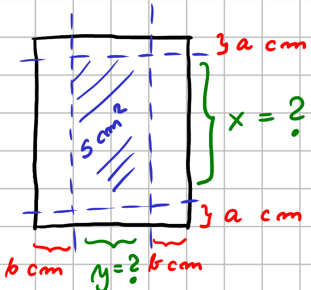
Zatem wartość największa to $g(11) = 7$, a najmniejsza $g(15) = -7$

b) $f'(4) = f'(11) = 0$ $\land$ $f' \in C^1(\mathbb{R})$ bo $f \in C^2(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ Na mocy tw. Darboux f' przyjmuje w $[0,4]$ wszystkie wartości pośrednie

$f'(0) = -1$

$f(0) = -1 < -\frac{1}{2} < f(4) = 0 \Rightarrow \exists c \in (0,4) : f'(c) = \frac{-1}{2}$

ZAD. 9



Szukamy optymalnego x, y, by zminimalizować powierzchnię strony

$$P = (x+2a)(y+2b)$$

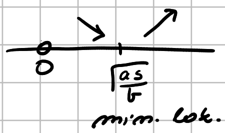
przy założeniu, że $x\cdot y = s$ tj: $y = \frac{s}{x}$

$$P = xy + 2ay + 2bx + 4ab$$

$f(x) = s + \frac{2as}{x} + 2bx + 4ab$ szukamy minimum lok.

$D_f = \mathbb{R}_+$ $\qquad f'(x) = \frac{-2as}{x^2} + 2b$

$f'(x) > 0 \iff 2b > \frac{2as}{x^2} \iff x^2 > \frac{2as}{2b} = \frac{as}{b} \underset{\substack{a>0, b>0 \\ s>0}}{\iff} x > \sqrt{\frac{as}{b}}$



Gdy $x = \sqrt{\frac{as}{b}}$, to $y = \frac{s}{x} = s\cdot\sqrt{\frac{b}{as}} = \sqrt{\frac{sb}{a}}$

Odpowiedź: Optymalne wymiary strony to $\sqrt{\frac{as}{b}} + 2a$ wysokość

$\sqrt{\frac{sb}{a}} + 2b$ szerokość