Zadanie domowe nr 6 - Całka nieoznaczona - część I

Zadanie 1. *Dana jest funkcja f taka, że* $f'(x) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$ *oraz* $f(\frac{\pi^2}{16}) = 0$. *Oblicz* $f(\frac{\pi^2}{36})$.

Zadanie 2. *Oblicz całki.*

a) $\int \left(\frac{\sqrt{\operatorname{arcctg} 2x}}{1+4x^2} + \frac{1}{x^3}\operatorname{ctg}\frac{2}{x^2}\right)dx$ b) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-9x^{12}}}$ c) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^4 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}$ d) $\int (x^5+2x^2-1)\operatorname{arctg} x dx$

e) $\int \frac{e^{2x}+4e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$ f) $\int 2^{\sin^3 x}\sin^5 x\cos x dx$ g) $\int \cos(\ln x)dx$

Zadanie 3. *Podaj postaci rozkładu na ułamki podstawowe oraz na ułamki proste (bez wyliczania współczynników) funkcji f danej wzorem*

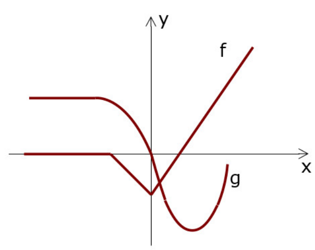
$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2(x+5)^3(x^2+7)^2(x^2+2x+15)}.$$

Zadanie 4. *Oblicz całki.*

a) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}dx$ b) $\int \frac{x^6-8x^3+x^2-4}{x^4-8x}dx$

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 5. *Poniższy rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji oraz jej pierwotnej. Wskaż funkcję pierwotną.*



Zadanie 6. *Znajdź wielomian $w \in \mathbb{R}[x]$ możliwie najniższego stopnia i taki, że $P = (2, w(2))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = w(x)$ oraz $w(2) = 1, w'(2) = 2$.*

Zadanie 7. *Obliczamy $\int \frac{dx}{x}$ stosując wzór na całkowanie przez części.*

$$\int \frac{dx}{x} = \int 1\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\cdot(-\frac{1}{x^2})dx = 1 + \int\frac{dx}{x}.$$

Stąd wnioskujemy $0 = 1$. Gdzie tkwi błąd?

Zadanie 8. *Oblicz całki.*

a) $\int \frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} \cdot e^{\sin x} dx$ *b)* $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left(\ln(x^2+1) - 2\ln x\right)}{x^4} dx$

WSKAZÓWKI: a) Przedstaw całkę jako różnicę dwóch całek i do każdej z nich zastosuj wzór na całkowanie przez części. b) Zapisz całkę w postaci $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \ln(1+\frac{1}{x^2})\frac{1}{x^3} dx$.

Zadanie 9. *Całka* $\int \frac{1+2x^2}{x^5(1+x^2)^3} dx$ *wymagałaby przy rozkładzie na ułamki proste rozwiązywania układu wielu równań. Zauważ, że*

$$\int \frac{1+2x^2}{x^5(1+x^2)^3} dx = \int \frac{x+2x^3}{x^6(1+x^2)^3} dx = \int \frac{x+2x^3}{(x^2+x^4)^3} dx$$

i oblicz ją prościej podstawiając $t = x^2 + x^4$.