Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Zadanie domowe nr 8
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
grudzień 2024r.

Zadanie domowe nr 8
Całka oznaczona i niewłaściwa - zastosowania geometryczne

Zadanie 1. *Korzystając z definicji całki oznaczonej, oblicz* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\dots(1+\frac{n}{n})]$.

Zadanie 2. *W dogodny sposób oblicz całki (o ile są zbieżne).*

a) $\int_0^{\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\cos x)dx$ *a)* $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1-5x}dx$ *b)* $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

c) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^{17}+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}dx$ *d)* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$ *b)* $\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$

Zadanie 3. *a) Oblicz pole obszaru ograniczonych krzywymi o równaniach* $x=1$, $y=xe^x$ *oraz styczną do krzywej* $y=xe^x$ *w punkcie* $P=(\ln 2,\ln 4)$.

b) Naszkicuj kształt krzywej Γ. *Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą* Γ *i osią Ox.*

$$\Gamma:\quad x=t^2,\quad y=t-\frac{1}{3}t^3,\quad t\geq 0$$

c) Naszkicuj kształt podanych krzywych i oblicz pole obszaru ograniczonego tymi krzywymi (wewnątrz krzywych).

$$r=\sqrt{3}\sin\varphi,\quad r=1+\cos\varphi$$

Zadanie 4. *Oblicz długość łuku krzywej* Γ.

$$\Gamma:\ x(t)=5\cos t(1+\cos t),\ y(t)=5\sin t(1+\cos t),\quad t\in[0,2\pi]$$

Zadanie 5. *Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi Ox figury ograniczonej krzywymi*

$$y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}\,,\quad y=0\,,\quad x=1.$$

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 6. *Ustaw podane liczby w ciąg rosnący.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln 2}{h},\ \ln\frac{2}{6},\ 0,\ \ln 3+\ln 4+\ln 5+\ln 6,\ \ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5,\ \sum_{k=0}^{7}\frac{\ln(2+\frac{k}{2})}{2},\ \int_2^6\ln x dx$$

Zadanie 7. *a) Sprawdź za pomocą bezpośredniego rachunku, że* $\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$.
b) Przeprowadzono następujący rachunek.

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-\operatorname{arctg}0\Big)=-\frac{\pi}{6}$$

Ale przecież całka funkcji stale dodatniej nie może być ujemna. Wyjaśnij błąd w powyższym rozumowaniu.

Zadanie 8. *Niech $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ taka, że $f(1) = f(2) = 2$, $f'(1) = 6, f'(2) = 5$, $f''(1) = 3, f''(2) = 5$. Uzasadnij, że $\int_1^2 f(x)f''(x)dx \leq 2$.*

WSKAZÓWKA: Zastosuj wzór na całkowanie przez części.

Zadanie 9. *Korzystając z reguły de l'Hôpitala, oblicz granicę.*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x t^t dt}{x^{x+1} - 1}$$

Zadanie 10. *Dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ całka $\int_0^\infty \left(\frac{ax^3}{x^4+2} - \frac{1}{8x+5}\right)dx$ jest zbieżna. Wyznacz takie $a \in \mathbb{R}$ i oblicz całkę.*