Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Zadanie domowe nr 9
WFiIS, informatyka stosowana, I rok
grudzień 2024r.

Zadanie domowe nr 9 - Funkcje wielu zmiennych - część I

Zadanie 1. *Uzasadnij, że nie istnieją granice podwójne:*

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, *za pomocą definicji Heinego, tj. wybierając odpowiednio dwa ciągi,*

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{|x|+|y|}$, *zawężając dziedzinę funkcji do dwóch odpowiednio wybranych krzywych,*

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$, *używając współrzędnych biegunowych,*

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y}{2x+y^3}$, *obliczając granice iterowane.*

Zadanie 2. *Oblicz granice.*

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arctg}(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$ *b)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x-y}$ *c)* $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(y-2)^2\ln x}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

d) $\lim_{(x,y,z)\to(\sqrt{3},0,0)} \frac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2y^4z^6+1}-2}{(x-\sqrt{3})^2+z^{10}}$

Zadanie 3. *Zaniedbując dziedzinę, oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f.*

a) $f(x,y,z) = (2x+3z)^{yz}$ *b)* $f(x,y) = \sqrt[4]{x^7+y^2} \cdot \ln\frac{x}{y+2} - \left(\operatorname{arctg}(\pi x^2+e)\right)^{\sin(y+1)}$

Zadanie 4. *Oblicz wskazane pochodne cząstkowe.*

a) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, *dla* $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3-y^3}$

b) $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$, *dla* $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^7+2y^7+3z^7}{x^6+y^6+z^6} & ; \ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; \ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Zadanie 5. *Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = (x+1)^y \cdot y^{x+1}$ w punkcie $P_0 = (1,1)$ w kierunku wektora $\vec{v} = [-3,4]$.*

Zadanie 6. *Znajdź płaszczyznę styczną π_s do powierzchni $\Sigma : \quad z = (2+x-3y)^4$ w punkcie przecięcia Σ z osią Oz.*

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 7. *Naszkicuj kilka poziomic funkcji f danej wzorem $f(x,y) = e^{-x^2-(y-1)^2}$ i na tej podstawie wskaż punkt, w którym f osiąga ekstremum lokalne.*

Zadanie 8. *Zbadaj ciągłość funkcji f danej wzorem $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & ; \ x \geq 0 \\ 2 & ; \ x < 0 \end{cases}$ w całej dziedzinie.*

Zadanie 9. *Funkcja f dana jest wzorem $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+8y^3}$.*

a) Korzystając z definicji, zbadaj różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0,0)$.

b) Czy do obliczenia pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie $(0,0)$ w kierunku wektora $v = [1,1]$ można wykorzystać gradient funkcji f?