Zadanie domowe nr 9

ZAD. 1 Granica nie istnieje.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}}_{f(x,y)}$

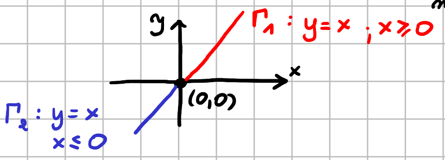
$\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0) \qquad f\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)=\dfrac{\frac{1}{m^3}}{\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^2}}=\frac{1}{m^3}\cdot\frac{m^4}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

$\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m^2}\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}(0,0) \qquad f\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m^2}\right)=\dfrac{\frac{1}{m^4}}{\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^4}}=\frac{1}{2}\xrightarrow[m\to\infty]{}\frac{1}{2}$

$0\neq\frac{1}{2}$

granica nie istnieje

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{\sin(x+y)}{|x|+|y|}}_{f(x,y)}$



$f_1 := f\big|_{\Gamma_1} \qquad f_1(x)=\dfrac{\sin 2x}{2|x|}=\dfrac{\sin 2x}{2x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

$f_2 := f\big|_{\Gamma_2} \qquad f_2(x)=\dfrac{\sin 2x}{2|x|}=\dfrac{\sin 2x}{-2x}\xrightarrow[x\to 0]{}-1$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}=\left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ r\to 0^+,\ \varphi\text{-dowz} \end{array}\right| = \lim\limits_{\substack{r\to0^+\\ \varphi\text{-dowz}}}\dfrac{r^2\sin\varphi\cos\varphi+r^3\sin^3\varphi}{r^2}=\lim\limits_{\substack{r\to0^+\\ \varphi\text{-dowz}}}\underbrace{\big(\sin\varphi\cos\varphi+\underbrace{r}_{0^+}\cdot\underbrace{\sin^3\varphi}_{\text{ogr}}\big)}_{0}$

nie istnieje, zależy od φ

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y}{2x+y^3}$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x^3+y}{2x+y^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2}=0$

$\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+y}{2x+y^3}\right)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{y^3}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y^2}=+\infty$

granice iterowane istnieją i są różne, więc granica podwójna nie istnieje

ZAD. 2

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^4-y^4)}{x^2-y^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^4-y^4)}{x^4-y^4}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\dfrac{\operatorname{arctg}(x^4-y^4)}{x^4-y^4}}_{1}\cdot\underbrace{(x^2+y^2)}_{0}=0$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x-y}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3(x+y)-y^3(x+y)}{x-y}=$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x+y)(x^3-y^3)}{x-y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)(x^2+xy+y^2)=0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\underbrace{\dfrac{(y-2)^2\cdot\ln x}{(x-1)^2+(y-2)^2}}_{f(x,y)}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}0$

METODA 1:

$0\leq|f(x,y)|=\dfrac{(y-2)^2\cdot|\ln x|}{(x-1)^2+(y-2)^2}\leq\dfrac{(y-2)^2\cdot|\ln x|}{(y-2)^2}=|\ln x|\xrightarrow[(x,y)\to(1,2)]{}0$

na mocy twierdzenia o 3 funkcjach $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}|f(x,y)|=0$

zatem $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=0$

METODA 2:

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{(y-2)^2\cdot\ln x}{(x-1)^2+(y-2)^2}=\left|\begin{array}{l} x-1=u \\ y-2=v \\ x=u+1 \end{array}\right|=\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\dfrac{v^2\cdot\ln(u+1)}{u^2+v^2}=\left|\begin{array}{l} u=r\cos\varphi \\ v=r\sin\varphi \\ r\to0^+ \\ \varphi\text{-dowz} \end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{\substack{r\to0^+\\ \varphi\text{-dowz}}}\dfrac{\cancel{r^2}\sin^2\varphi\cdot\ln(1+r\cos\varphi)}{\cancel{r^2}}=\lim\limits_{\substack{r\to0^+\\ \varphi\text{-dowz}}}\underbrace{\sin^2\varphi}_{\text{ogr}}\cdot\underbrace{\ln(1+\underbrace{r}_{0}\underbrace{\cos\varphi}_{\text{ogr}})}_{\ln 1=0}=0$

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\sqrt{3},0,0)}\dfrac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2y^4\cdot z^6+4}-2}{(x-\sqrt{3})^2+z^{10}}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{(x,y,z)\to(\sqrt{3},0,0)}\underbrace{\dfrac{(x-\sqrt{3})^2y^4z^6+\cancel{4}-\cancel{4}}{\left[(x-\sqrt{3})^2+z^{10}\right]\cdot\left[\sqrt{(x-\sqrt{3})^2y^4z^6+4}+2\right]}}_{g(x,y,z)}=0$

$\underbrace{0}_{\downarrow\, 0}\leq g(x,y,z)\leq\dfrac{(x-\sqrt{3})^2y^4z^6}{(x-\sqrt{3})^2+z^{10}}\leq\dfrac{\cancel{(x-\sqrt{3})^2}y^4z^6}{\cancel{(x-\sqrt{3})^2}}=\underbrace{y^4z^6}_{\downarrow\, 0}$

ZAD. 3

a) $f(x,y,z)=(2x+3z)^{yz}$ Zał. $2x+3z>0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=yz\cdot(2x+3z)^{yz-1}\cdot 2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=(2x+3z)^{yz}\cdot\ln(2x+3z)\cdot z$

$f(x,y,z)=e^{yz\cdot\ln(2x+3z)} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z}=e^{yz\cdot\ln(2x+3z)}\cdot\left[y\cdot\ln(2x+3z)+yz\cdot\dfrac{1}{2x+3z}\cdot 3\right]$

b) $f(x,y)=\sqrt[4]{x^7+y^2}\cdot\ln\dfrac{x}{y+2}-\left(\operatorname{arctg}(\pi x^2+e)\right)^{\sin(y+1)}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{4}(x^7+y^2)^{-3/4}\cdot 7x^6\cdot\ln\dfrac{x}{y+2}+\sqrt[4]{x^7+y^2}\cdot\dfrac{y+2}{x}\cdot\dfrac{1}{y+2}-\sin(y+1)\cdot\left(\operatorname{arctg}(\pi x^2+e)\right)^{\sin(y+1)-1}\cdot\dfrac{1}{1+(\pi x^2+e)^2}\cdot 2\pi x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{4}(x^7+y^2)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2y\cdot\ln\dfrac{x}{y+2}+\sqrt[4]{x^7+y^2}\cdot\dfrac{y+2}{x}\cdot\dfrac{-x}{(y+2)^2}-\left(\operatorname{arctg}(\pi x^2+e)\right)^{\sin(y+1)}\cdot\ln\left(\operatorname{arctg}(\pi x^2+e)\right)\cdot\cos(y+1)$

ZAD. 4

a) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=?$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{-(\Delta y)^3}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

b) $$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^7+2y^7+3z^7}{x^6+y^6+z^6} & ;\ (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & ;\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=?$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0,0,\Delta z)-f(0,0,0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{3\cdot(\Delta z)^7}{(\Delta z)^6}}{\Delta z}=3$$

ZAD. 5 $\quad f'_{\vec v}(P_0)=?$ $\quad f(x,y)=(x+1)^y\cdot y^{x+1}$ $\quad P_0=(1,1)$, $\vec v=[-3,4]$

Dla $x+1>0$, $y>0$ funkcja f jest klasy C^1, a zatem różniczkowalna $\Rightarrow \exists\, f'_{\vec v}(P_0)=\vec\nabla f(P_0)\circ\hat v$

$|\vec v|=\sqrt{9+16}=5$ $\quad \hat v=\frac{\vec v}{|\vec v|}=[-\frac35,\frac45]$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot(x+1)^{y-1}\cdot y^{x+1}+(x+1)^y\cdot y^{x+1}\ln y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1\cdot2^0\cdot1^2+2^1\cdot1^2\cdot0=1$

$\frac{\partial f}{\partial y}=(x+1)^y\ln(x+1)\cdot y^{x+1}+(x+1)^y\cdot(x+1)y^x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=2^1\cdot\ln2\cdot1^2+2^1\cdot2\cdot1=2\ln2+4=4+\ln4$

$\vec\nabla f(P_0)=[1,4+\ln4]$ $\quad f'_{\vec v}(P_0)=[1,4+\ln4]\circ[-\frac35,\frac45]=-\frac35+\frac{16}{5}+\frac45\ln4=\frac45\ln4+\frac{13}{5}$

ZAD. 6 $\quad \Sigma:\ z=(2+x-3y)^4$ $\quad$ Równanie płaszczyzny stycznej do Σ w punkcie przecięcia Σ z osią Oz

P_0 - punkt przecięcia Σ z osią Oz, $P_0=(0,0,f(0,0))$ gdzie $f(x,y)=(2+x-3y)^4$

$P_0=(0,0,16)$

$\vec N=[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),-1]$ wektor normalny płaszczyzny stycznej

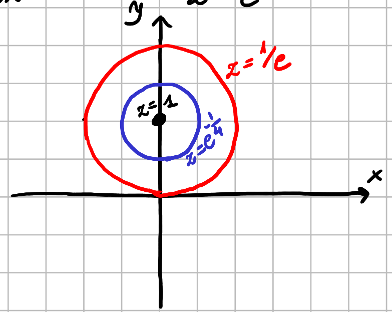
$\frac{\partial f}{\partial x}=4(2+x-3y)^3$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=32$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4(2+x-3y)^3\cdot(-3)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-96$

$\vec N=[32,-96,-1]$ $\quad \pi:\ 32(x-0)-96(y-0)-1(z-16)=0$

$\pi:\ 32x-96y-z+16=0$

ZAD. 7 $\quad f(x,y)=e^{-x^2-(y-1)^2}$ $\quad$ Poziomice + ekstrema lokalne

$D_f=\mathbb{R}^2$



$z=e^{-1}$ $\quad -x^2-(y-1)^2=-1$, $\quad x^2+(y-1)^2=1$

$z=e^{-1/4}$ $\quad -x^2-(y-1)^2=-\frac14$, $\quad x^2+(y-1)^2=(\frac12)^2$

$z=e^0=1$ $\quad -x^2-(y-1)^2=0$; $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

Dla $z=1$ poziomica redukuje się do punktu $P=(0,1)$

Może być to punkt ekstremum

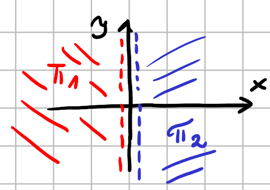
$f(P)=1$ $\quad \forall (x,y)\neq(0,1)$ $\quad f(x,y)=\frac{1}{e^{x^2+(y-1)^2}}<\frac{1}{e^0}=1$

Zatem w punkcie tym f osiąga maksimum lokalne

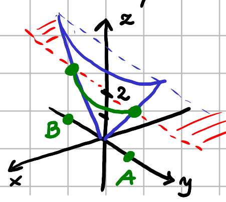
ZAD. 8 $\quad$ Ciągłość $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & ;\ x\geq0\\ 2 & ;\ x<0\end{cases}$ w całej dziedzinie.

$D_f=\mathbb{R}^2$ $\quad$ f ciągła w półpłaszczyznach otwartych

$\pi_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0\}$, $\quad \pi_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0\}$



Co z punktami na prostej $x=0$?



Z rysunku widać, że w punktach $A=(0,2)$ v $B=(0,-2)$ f jest ciągła

$z=2$ $\quad \sqrt{x^2+y^2}=2$, $x^2+y^2=4$

$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,2)\\(x,y)\in\pi_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,2)\\(x,y)\in\pi_2}} f(x,y)=f(0,2)$ $\quad$ każda droga w otoczeniu $(0,2)$ wchodzi do π_1 lub π_2

Analogicznie dla $(0,-2)$

ZAD. 8 ciąg dalszy

Niech P leży na prostej $x=0$ tzn. $P=(0,y_0)$ oraz $y_0 \neq \pm 2$
$P \neq A$, $P \neq B$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in\Pi_1}} f(x,y) = 2 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in\Pi_2}} f(x,y) = |y_0|$$

Zatem w punktach $P=(0,y_0)$ $y_0 \neq \pm 2$ f nie jest ciągła

ZAD. 9 $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+8y^3}$ $D_f = \mathbb{R}^2$

a) Rózniczkowalność w punkcie $P_0=(0,0)$

f róż. w P_0 $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ liniowe : $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)-f(P_0)-A(\overrightarrow{P_0P})}{|\overrightarrow{P_0P}|}=0$

A ozn. $d_{P_0}f$; $d_{P_0}f(\Delta x,\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3}-0}{\Delta x} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{8(\Delta y)^3}-0}{\Delta y} = 2$$

$P_0=(0,0)$
$P=(\Delta x,\Delta y)$
$P\to P_0$ gdy $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$

Czy $$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+8(\Delta y)^3}-0-1\cdot\Delta x-2\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}_{g(\Delta x,\Delta y)} = 0 \ ?$$

NIE

Np. $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$

$$g\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt[3]{\frac{9}{n^3}}-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{(\sqrt[3]{9}-3)\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{9}-3}{2} \to \frac{\sqrt[3]{9}-3}{2} \neq 0$$

Funkcja nie jest różniczkowalna w P_0.
$\Downarrow$
b) Nie można wykorzystać gradientu $\vec{\nabla} f(P_0)$ do obliczenia $f'_{\vec{v}}(P_0)$
Pochodną kierunkową należy obliczyć, korzystając z definicji.
(Zrobiliśmy to na ćwiczeniach!)