

Zadanie domowe nr 1 - Struktury algebraiczne, liczby zespolone

Zadanie 1. a) Czy działanie $\circ$ określone wzorem

$$x \circ y = x + (-1)^x \cdot y$$

jest działaniem łącznym w zbiorze $\mathbb{Z}$?

b) Czy $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ jest półgrupą/grupą (przemienną)?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad x \circ y := x + y + xy$$

b) Czy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \circ)$ jest półgrupą/grupą (przemienną)?

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \circ y := x \cdot |y|$$

Zadanie 2. Wyznacz $\arg \left[\left(\sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3} \right)^{17} \right]$.

Zadanie 3. Rozwiąż równania.

$$a) z^4 = \frac{i-1}{\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}} \quad b) z^3 = \frac{(i-1)^7}{(\sqrt{3}-i)^5} \quad c) z^3 = (2-2i)^9 \quad d) (iz+2)^4 = (z-4i)^4$$

$$e) 9iz^3 = (\bar{z})^5 \quad f) z^{11} = (\bar{z})^{11} \quad g) z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$$

h)

$$i^3 \bar{z} z^6 = \operatorname{Im}(e^{\frac{\pi}{2}i}) \cdot \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{(\sqrt{12}-2i)^{15}}{(-\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5})^4}$$

i)

$$\frac{|4-3i|}{i} \cdot \bar{z}^2 = \frac{4+12i}{3-i} \cdot \frac{(\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{3})^7}{(\sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3})^5} \cdot z^5$$

Zadanie 4. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej podane zbiory.

a)

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}) \leq |\frac{1}{2}i\bar{z} - 2 + 6i| < |\sqrt{3} + i|^2\}$$

b)

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^6) < 0\}$$

c)

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : |3\bar{z} + 2i| \geq 6 \wedge |z| < |z+2| \wedge \frac{\pi}{4} < \arg \bar{z} < \frac{3}{4}\pi \right\}$$