

Zadanie domowe nr 2 - Macierze i układy równań liniowych

Zadanie 1. Czy prawdziwe jest poniższe stwierdzenie? Odpowiedź uzasadnij.

Zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych stopnia n o elementach z $\mathbb{R}$ tworzy z działaniem mnożenia macierzy grupę nieprzemienną.

Zadanie 2. a) Dana jest macierz $A \in M_6(\mathbb{R})$, spełniająca równanie $A^3 - 4A^T = \mathbf{0}$. Podaj możliwe wartości wyznacznika macierzy A .

b) Dane są macierze $B, C \in M_4(\mathbb{R})$, o których wiadomo, że $\det B = 16$, zaś C powstaje z macierzy B poprzez wykonanie następujących operacji: zamiany miejscami kolumny pierwszej z kolumną czwartą, pomnożenia trzeciego wiersza przez $\frac{1}{4}$ oraz dodania do wiersza drugiego wiersza pierwszego. Oblicz wyznacznik macierzy C .

c) Dane są macierze $D, E \in M_3(\mathbb{R})$, o których wiadomo, że $\det D = 5$ oraz $\det(DE) = 3$. Oblicz wyznacznik macierzy $F = E^{-1}D^{-1}2D^T$.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie macierzowe $(X + I)^T \cdot A = 2A - I$, gdzie $A \in M_4(\mathbb{R})$ jest taka, że

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & ; \quad i = j \\ 3 & ; \quad i \neq j \end{cases}.$$

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 4w = 4 \\ 4x + 5y + 6z + 3w = 5 \\ 5x + 3y + 9z + 9w = -9 \end{cases}$$

Zadanie 5. Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$. W przypadku układu nieoznaczonego określ liczbę parametrów.

$$\begin{cases} 3px_1 + 6x_2 + 3x_3 = 6 \\ px_1 + (p+1)x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ px_1 + 2x_2 + (p-1)x_3 + x_4 = 1 \\ 2px_1 + 4x_2 + 2x_3 + (p-3)x_4 = 2p-2 \end{cases}.$$

Zadanie 6. Rozstrzygnij, czy podane stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.

$$\text{Dany jest układ równań } \begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = a \\ x + y = a \end{cases}, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R} \text{ jest parametrem.}$$

a) Dla każdego $a < -2$ układ jest sprzeczny.

b) Jeśli układ jest oznaczony, to $a = 1$ lub $a = -\frac{3}{2}$.

c) Można tak wybrać wartość a , by otrzymać układ nieoznaczony.