AW – gr. 2 – wtorek – Kartk. 1 – 20p.

Zad. 1 (9p)

$A = \{a+bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ $(A, +, \cdot)$ pierścień / ciało?

- $(A,+)$ to grupa abelowa, bowiem działanie $+$ jest
  - wewnętrzne $\forall a+bi, c+di \in A$ $(a+bi)+(c+di) = (\underbrace{a+c}_{\in \mathbb{Z}}) + (\underbrace{b+d}_{\in \mathbb{Z}})i$
  - łączne i przemienne (jako $+$ w $\mathbb{C}$)
  - el. neutralny to $\underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} i \in A$ $\forall a+bi$ $(a+bi)+(0+0i) = (0+0i)+(a+bi) = a+bi$
  - el. przeciwny do $a+bi$: to $\underbrace{-a}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{-b}_{\in \mathbb{Z}}i \in A$ $(-a-bi)+(a+bi) = (0+0i) = (a+bi)+(-a-bi)$
- Działanie $\cdot$ jest
  - wewnętrzne $(a+bi), (c+di) \in A$ $(a+bi)\cdot(c+di) = (\underbrace{ac-bd}_{\in \mathbb{Z}}) + (\underbrace{ad+bc}_{\in \mathbb{Z}})i \in A$
  - łączne, przemienne, rozdzielne względem $+$ (jako mnożenie w $\mathbb{C}$)
  - $\forall a+bi \in A$ $(a+bi)\cdot(1+0i) = (1+0i)\cdot(a+bi) = a+bi$
    el. neutralny to $\underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} i \in A$
  - El. odwrotny do $a+bi \neq 0$?
    $(a+bi)(c+di) \underset{\text{przemienność}}{=} (c+di)(a+bi) = 1+0i \Rightarrow c+di = \frac{1}{a+bi}$
    $c+di = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2-b^2}}_{\notin \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{-b}{a^2-b^2}}_{\notin \mathbb{Z}} i \notin A$

Pierścień przemienny z jedynką
nie ciało

Zad. 2 (6p)

$|z^3| \cdot z^3 = \bar{z} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3}\right)^5$

1) $z=0$ spełnia równanie
2) Zał. $z \neq 0$, $z = |z|e^{i\varphi}$, wówczas $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$, $|z^3| = |z|^3$

$\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = e^{-\frac{\pi}{6}i}$

wstawiając

$|z|^3 \cdot |z|^3 e^{3i\varphi} = |z| e^{-i\varphi} \cdot e^{-\frac{5}{6}\pi i}$ $\Big/ : |z|$ bo z zał. $z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0$, $\cdot e^{i\varphi}$

$|z|^6 e^{4i\varphi} = 1 \cdot e^{-\frac{5}{6}\pi i}$

$\Rightarrow |z| = 1 \wedge 4\varphi = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

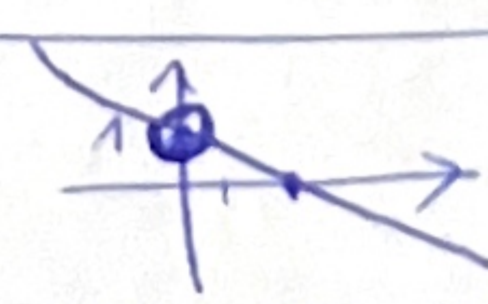
$\varphi_k = -\frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}$ $k \in \{0,1,2,3\}$

Odp
$z = 0 \vee z_k = 1e^{\varphi_k i}$, $k \in \{0,1,2,3\}$

(5p)

Zad. 3

$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = -2\}$! $iz+1 \neq 0$, $z \neq -\frac{1}{i} = i$



Niech $z = x+iy$

$w = \frac{2z+1}{iz+1} = \frac{2(x+iy)+1}{i(x+iy)+1} = \frac{(2x+1)+2yi}{(1-y)+ix} = \frac{[(2x+1)+2yi][(1-y)-ix]}{(1-y)^2+x^2} = \frac{(2x+1)(1-y)-(2x+1)xi+2y(1-y)i+2xy}{(1-y)^2+x^2}$

$\operatorname{Im}(w) = \frac{-(2x+1)x+2y(1-y)}{(1-y)^2+x^2} = -2 \iff \cancel{-2x^2}-x+2y-2y^2 = -2(1-2y+y^2)\cancel{-2x^2}$

$-x+2y-\cancel{2y^2} = -2+4y-\cancel{2y^2}$

$x+2y-2=0$

PROSTA
$y = 1-\frac{x}{2}$

AH – Grupa 2 – Kartk. 1 – 20p. 2025r.

Zad. 1 $(A,\circ)$ $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $(a,b)\circ(c,d) = (a+c, bd)$ (pół)grupa?

9p

Działanie $\circ$ jest

- wewnętrzne: $\forall (a,b),(c,d)\in A \quad (a,b)\circ(c,d)\in A$
  bowiem $b\neq 0,\ d\neq 0 \Rightarrow bd\neq 0 \Rightarrow (a+c, bd)\in A$
- przemienne $\forall (a,b),(c,d)\in A \quad (a,b)\circ(c,d) = (a+c, bd) = (c+a, db) = (c,d)\circ(a,b)$
- łączne $\forall (a,b),(c,d),(x,y)\in A \quad L=P$

$L = [(a,b)\circ(c,d)]\circ(x,y) = (a+c, bd)\circ(x,y) = (a+c+x, bdy)$

$P = (a,b)\circ[(c,d)\circ(x,y)] = (a,b)\circ(c+x, dy) = (a+c+x, bdy)$

- Czy $\exists (e_1,e_2)\in A$ t.że $\forall (a,b)\in A \quad (a,b)\circ(e_1,e_2) = (e_1,e_2)\circ(a,b) = (a,b)$?

TAK bowiem działanie przemienne $\Rightarrow$ wystarczy rozważyć

$(a,b)\circ(e_1,e_2) = (a,b)$

$(a+e_1, be_2) = (a,b) \iff \begin{cases} a+e_1 = a \Rightarrow e_1 = 0 \\ be_2 = b \Rightarrow e_2 = 1 \end{cases}$! $b\neq 0$

$(e_1,e_2) = (0,1)\in A$, $1\neq 0$

- Czy $\forall (a,b)\in A\ \exists (a',b')\in A$ t.że $(a,b)\circ(a',b') \underset{\text{przemienne!}}{=} (a',b')\circ(a,b) = (e_1,e_2)$?

TAK

$(a,b)\circ(a',b') = (e_1,e_2) \iff (a+a', bb') = (0,1) \iff \begin{cases} a+a' = 0 \Rightarrow a' = -a \\ bb' = 1 \Rightarrow b' = \frac{1}{b} \neq 0 \end{cases}$! $b\neq 0$ $\Downarrow$ $(a',b')\in A$

GRUPA ABELOWA

Zad. 2 $z^6 = (1+i)(i\bar{z})^2$

1) $z=0$ spełnia równanie
2) zał. $z\neq 0$, $z = |z|e^{i\varphi}$, wówczas $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$

$|1+i| = \sqrt{2}$ $\quad 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

wstawiając $|z|^6 e^{6i\varphi} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot\underbrace{(-1)}_{e^{\pi i}}\cdot |z|^2 e^{-2i\varphi} \quad /: |z|^2 \cdot e^{2i\varphi}$ bowiem $|z|\neq 0$ bo z zał. $z\neq 0$

$|z|^4 e^{8i\varphi} = e^{\frac{5}{4}\pi i}\cdot\sqrt{2}$

$\Rightarrow |z|^4 = 2^{\frac{1}{2}} \ \wedge\ 8\varphi = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$

$|z| = \sqrt[8]{2}$ $\quad \varphi_k = \frac{5}{32}\pi + k\frac{\pi}{4}$ $\quad k\in\{0,1,\dots,7\}$

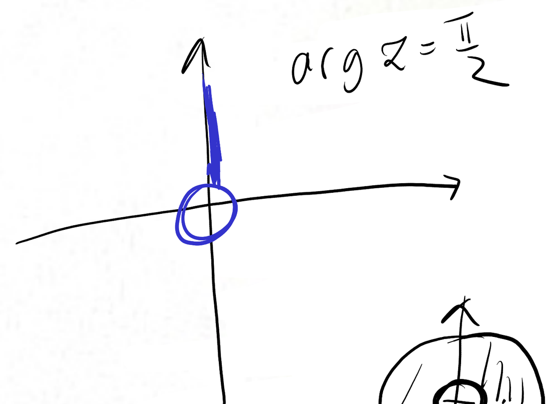
Odp. rozwiązania to $z=0$, $z = \sqrt[8]{2}e^{i\varphi_k}$ $k\in\{0,1,\dots,7\}$

Zad. 3 $A = \left\{ z\in\mathbb{C} : \left|\frac{z+i}{z^2+1}\right| \geq 1 \ \wedge\ |z+1-i| \leq |z-1-i| \ \wedge\ \arg(zi) = \pi \right\}$

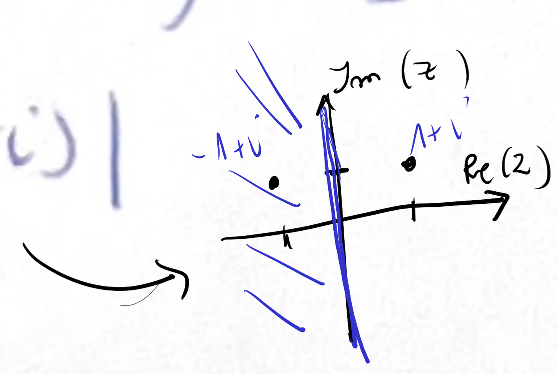
$z^2+1\neq 0$
$z^2 \neq -1 = i^2$
$z \neq \pm i$

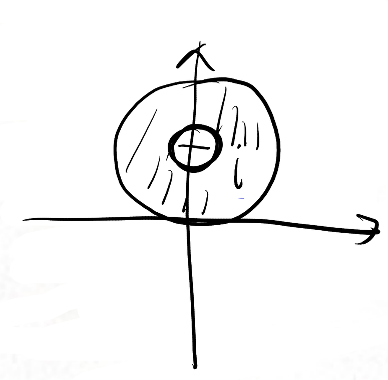
- $\left|\frac{z+i}{z^2+1}\right| = \frac{|z+i|}{|z^2+1|} = \frac{|z+i|}{|z^2-i^2|} = \frac{|z+i|}{|z+i||z-i|} = \frac{1}{|z-i|} \geq 1 \iff 1 \geq |z-i|$
- $\pi = \arg(iz) = \underbrace{\arg(i)}_{\frac{\pi}{2}} + \arg(z) + 2k\pi$

$\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad /k=0 \quad \arg z = \frac{\pi}{2}$



- $|z-(-1+i)| \leq |z-(1+i)|$





$\Longrightarrow$