

Zad. 1

$$[A|B] = \begin{bmatrix} p & 1 & p+4 & 2 & 0 \\ 2p & p & 2p+18 & 14 & 22 \\ 0 & 2p & p-7 & p-7 & -16 \\ 0 & 2p-4 & 20 & p+21 & p+45 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} p & 1 & p+4 & 2 & 0 \\ 0 & p-2 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 2p & p-7 & p-7 & -16 \\ 0 & 2p-4 & 20 & p+21 & p+45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} W_3 + W_2 \\ W_4 - 2W_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p & 1 & p+4 & 2 & 0 \\ 0 & p-2 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & p+3 & p+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & p+1 & p+1 \end{bmatrix}$$

$p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2, -3\}$ oznaczony

$$p = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{W_2 + 2W_4 \\ W_3 - W_4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_3 = x_4 = 1 \\ \text{sprężony} \end{matrix}$$

$$p = -1 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{nicorn. (1 parameter)}$$

$$p = 2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{sprężony}$$

$$p = -3 \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{sprężony}$$

Zad. 2 Wyznaczyć równanie parametryczne prostej l równoległej do prostej k przechodzącej przez punkt przecięcia tych prostych

$$k: x+2 = 3y+3 = z+1 \quad \vee \quad m: 5-x = 4-2y = 2z$$

Oraz przechodzącej przez punkt przecięcia tych prostych

$$k: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{\frac{1}{3}} = \frac{z+1}{1} \quad m: \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-0}{\frac{1}{2}}$$

$$A = (-2, -1, -1) \in k$$

$$B = (5, 2, 0) \in m$$

$$\vec{a} = [1, \frac{1}{3}, 1] \parallel k$$

$$\vec{b} = [-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \parallel m$$

$$\text{niech } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{c} \parallel l$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = [\frac{1}{6}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{6}]$$

$$k: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + \frac{1}{3}t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = 5 - s \\ y = 2 - \frac{1}{2}s \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} \quad \text{se i } k \cap m?$$

$$\begin{cases} -2 + t = 5 - s \\ -1 + \frac{1}{3}t = 2 - \frac{1}{2}s \\ -1 + t = \frac{1}{2}s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = 2t - 7 \\ s = 2t - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 + t = 5 - 2t + 2 \\ -1 + \frac{1}{3}t = 2 - t + 1 \\ 3t = 9, t = 3 \\ \frac{1}{3}t = 1 \end{cases}$$

$$P = (1, 0, 2)$$

$$l: \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = 0 - \frac{3}{2}t \\ z = 2 + \frac{5}{6}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Zad. 3 $\triangleright A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ t.zc $\det B'A^{-1} = 5$, $\det C^{-1} = \frac{1}{2}$
 A, B, C -odwracalne $D = [d_{ij}]$ $d_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ 2+i & i \neq j \end{cases}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\det D = 0 + 60 + 60 - 0 - 0 - 0 = 120$

$E = 2C B^{-1} A^{-1} D^T$ $\det E = 2^3 \det C \det(B'A^{-1}) \det(D^T)$
 $= 8 \frac{1}{\det C^{-1}} \cdot \frac{1}{\det(AB)} \cdot \det D = 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 120$
 $= 16 \cdot 24$

Zad. 4 Gr. 1

P/F $A = (1, 1, 1)$ $\vec{v} = [-3, 3, 0]$ $\pi : x + y - z + \frac{1}{2} = 0$

Nie istnieje rzut ukosny A na π w kierunku $\vec{v}$

PRAWDY

$\vec{n} = [1, 1, -1] + \pi$ $\vec{n} \cdot \vec{v} = -3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}$
 $\vec{v} \parallel \pi$

Zad. 4. Gr. 2

P/F Nie jest możliwe by istniała $A \in M_3(\mathbb{R})$ t.zc $\det(5A) = 5 \det A$

FALSZ A -odwracalna $\Rightarrow 5A$ odwracalna

Zad. 1

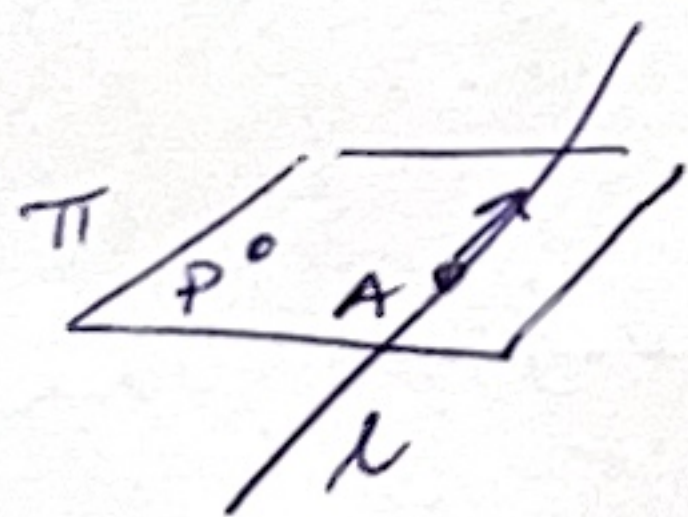
$$u = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} p+2 & 0 & -1 & -p & 2 \\ p+2 & p+1 & p+2 & 0 & 3-p \\ 0 & -p-1 & -p-4 & 2 & p \\ 0 & 2p+2 & 2p+8 & -2+p & -p \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} p+2 & 0 & -1 & -p & 2 \\ 0 & p+1 & p+3 & p & 1-p \\ 0 & -p-1 & -p-4 & 2 & p \\ 0 & 2p+2 & 2p+8 & -2+p & -p \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{w_3 + w_2 \\ w_4 - 2w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} p+2 & 0 & -1 & -p & 2 \\ 0 & p+1 & p+3 & p & 1-p \\ 0 & 0 & -1 & p+2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2p & p-2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 + 2w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} p+2 & 0 & -1 & -p & 2 \\ 0 & p+1 & p+3 & p & 1-p \\ 0 & 0 & -1 & p+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & p \end{array} \right]$$

- $p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ uw. oznaczone
- $p = -2$ uw. sprzeczny (ostatnie równanie sprzeczne)
- $p = -1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 + w_4 \\ w_3 + w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \text{ sprzeczny}$$

Zad. 2 Wyznaczyć równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny π zawierającej punkt $P = (1, 0, -1)$ oraz proste $l: 3x+3 \neq 4-2y=1-z$



Czy $P \in l$? $3 \cdot 1 + 3 \neq 4 - 2 \cdot 0$ NIE

$A \in l$ $l: \frac{x+1}{\frac{1}{3}} = \frac{y-2}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{-1}$

$\vec{a} \parallel l$ $\vec{a} = [\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1]$ $A = (-1, 2, 1)$

$\vec{AP} = [2, -2, -2] \parallel \pi$
 $\vec{a} \parallel l \wedge l \subset \pi \Rightarrow \vec{a} \parallel \pi$

$\pi: \begin{cases} x = 1 + t + \frac{1}{3}s \\ y = 0 - t - \frac{1}{2}s \\ z = -1 - t - s \end{cases}; t, s \in \mathbb{R}$

$\vec{m} = \vec{a} \times \vec{AP} \perp \pi$

$\vec{m} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = [-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}]$

$\pi: -1(x+1) - \frac{4}{3}(y-2) + \frac{1}{3}(z-1) = 0$

$\pi: 3(x+1) + 4(y-2) - (z-1) = 0 \quad / \cdot (-3)$

$\pi: 3x + 4y - z - 4 = 0$

Zad. 3

$A, B, C \in M_4(\mathbb{R})$

$\det D = ?$

$D = A^T \cdot C^6 \cdot B^{-2}$
 AB - odwracalne

A b. z. c.

$A^4 + 2A^{-1} = 0$

B - powstaje z A $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$
 $w_1 \leftrightarrow w_3, w_2 \leftrightarrow \sqrt[5]{2}$

$A^4 = -2A^{-1}$

$\det(A^4) = \det(-2A^{-1})$

$(\det A)^4 = (-2)^4 \cdot \frac{1}{\det A}$

$(\det A)^5 = 16$

$\det A = \sqrt[5]{16}$

$\det B = \frac{-1}{\sqrt[5]{2}} \cdot \det A$
 $= -\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$

$C^6 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8\pi^3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$

$\det D = \det(A^T C^6 B^{-1}) = \frac{\det A (\det C)^6}{\det B}$
 $= \frac{\sqrt[5]{16} \cdot 64 \pi^3}{-\sqrt[5]{8}} = -\sqrt[5]{2} \cdot 64 \pi^3$