

Zadanie domowe nr 2 - Ciągi liczbowe

Zadanie 1. Bez obliczania granicy uzasadnij zbieżność ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach

$$a_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+2} + \dots + \frac{2^n}{3^n+n}.$$

Zadanie 2. Wykaż, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\pi}{10} \\ a_{n+1} = \frac{9+a_n}{10} \end{cases}$$

Zadanie 3. Oblicz granice.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^{10}+3} - 3n^5 - 2n^2)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{6n+1} + \frac{4-n^3}{3n^2+7} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9^n+3^n} - \sqrt{3^{2n}+7})$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+\dots+15^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^8+2n^3-3}{n^8+n^5} \right)^{\frac{n^3}{\sqrt{3}}}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \ln(n^2+3) - 2 \ln n)^{n^2+1}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^n 111 + (7n)^{\frac{1}{4n}}}{1 - \sqrt[n]{n}}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+e} \sin \frac{1}{n+e} + n^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{e}{n} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} - 1 \right) \right)$

Zadanie 4. Wyznacz zbiór punktów skupienia, granicę dolną i granicę górną ciągu (a_n) . Czy ten ciąg jest zbieżny?

$$a_n = \frac{(1 + \cos(n\pi)) \ln 3n + \ln n}{\ln 2n}$$

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 5. Oblicz.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^6}{8} + n^4 + \frac{1}{n+1}} \cdot \ln \left(1 + \pi \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{2^n+3^n}{6^n} \right)$