

Zadanie domowe nr 4 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej - część I

Zadanie 1. Zaniedbując dziedzinę, oblicz pochodną funkcji f .

$$a) f(x) = \pi \cdot 2^{3 \ln^4(5x^6+7)} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[8]{\ln \frac{x}{9}}} + \cos^{10} \left(\arccos \left(\frac{11}{12 + \sin x} \right) \right)$$

$$b) f(x) = \left(\log_{\frac{1}{3}} x \right)^{3x} + \operatorname{arctg}(x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + 1}$$

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f \in C^1(\mathbb{R})$ taka, że $f(0) = 2, f(1) = 1, f(2) = -5$ oraz $f'(0) = -3, f'(1) = 7, f'(2) = 4$. Niech $g(x) = f(x + f(x)) \cdot f(x)$. Oblicz $g'(0)$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że $\forall x > -1 \quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

Zadanie 4. Korzystając z reguły de l'Hôpitala, oblicz granice.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - e^{-x+1} - 2x + 2}{x - \sin(x-1) - 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[7]{x^7 + 6x + 1} - x) \quad c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \cdot \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{\arccos x}{\ln x}} \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$$

Zadanie 5. Sprawdź, że stosowanie reguły de l'Hôpitala nie ułatwia obliczenia granicy, a następnie oblicz tę granicę.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{\ln(x^3+1)}}{x^3 + 5}$$

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 6. Korzystając z reguły de l'Hôpitala, oblicz granicę.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[5]{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} - x \right)$$

WSKAZÓWKA: Podstawiając $t = x + 3$, otrzymamy

$$3 + \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{(t-2)(t-1)t(t+1)(t+2)} - t) = 3 + \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{t^5 - 5t^3 + 4t} - t).$$

Zadanie 7. Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest poniższa równość?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + \frac{\sin bx}{x} \right) = 0$$

Zadanie 8. Niech $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Rysunek przedstawia ich wykresy oraz styczne w punkcie $(2, 2)$. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dokładnie wyjaśnij swoje rozumowanie.

