

Zadanie domowe nr 5 Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej - część II

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji f danej wzorem $f(x) = \frac{e^x + 2x^2 + 7|x|}{e^x + |7-x|}$.

Zadanie 2. Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema lokalne funkcji f .

$$a) f(x) = \ln(\log_x(\ln x)) \quad b) f(x) = \begin{cases} -1 - x^3 & ; \quad x \leq 0 \\ 2x - x^2 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

Zadanie 3. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f danej wzorem $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$.

Zadanie 4. a) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji we wskazanym przedziale.

$$f(x) = \ln(\cos x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

b) Czy funkcja g osiąga wartość najmniejszą i wartość największą w swojej dziedzinie? Jeśli tak, podaj je.

$$g(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$$

Zadanie 5. Określ przedziały wypukłości / wklęsłości funkcji i wskaż punkty przegięcia.

$$f(x) = x - \cos x - \frac{1}{8} \sin 2x$$

Zadanie 6. Narysuj przykładowy wykres funkcji f spełniającej równocześnie wszystkie podane warunki. Oznacz na rysunku ekstrema lokalne i punkty przegięcia.

- $f(-2) = f(3) = f(6) = 0$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$
 - f jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 - $f'(6) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2$
 - $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (0, 4)$ oraz $x \in (5, \infty)$
 - $f'(x) > 0$ dla $x \in (-2, 0)$ oraz $x \in (4, 5)$
 - $f''(x) < 0$ dla $x \in (3, 4)$ oraz $x \in (4, 6)$
 - $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$ oraz $x \in (0, 3)$ oraz $x \in (6, \infty)$
-

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 7. Dobierz parametry $a, b \in \mathbb{R}$ w taki sposób, by zachodziła poniższa równość.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

Zadanie 8. Dana jest funkcja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ taka, że $x = 4$ oraz $x = 11$ to jej jedyne punkty stacjonarne w przedziale $[0, 15]$ i ponadto

$$f(0) = 1, f(4) = -2, f(11) = 4, f(15) = -1, f'(0) = -1, f'(15) = -2, \forall x \in [0, 15] \quad |f''(x)| \leq 1.$$

Niech $g(x) = 3f(x) - \left(f'(x)\right)^2$.

a) Uzasadnij, że podane informacje są wystarczające do wyznaczenia wartości najmniejszej i wartości największej funkcji g w przedziale $[0, 15]$ i wyznacz te wartości.

b) Uzasadnij, że istnieje punkt $c \in (0, 15)$ taki, że $f'(c) = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 9. Na stronicy książki tekst drukowany powinien zajmować $s \text{ cm}^2$. Marginesy górny i dolny powinny mieć po $a \text{ cm}$, zaś marginesy lewy i prawy po $b \text{ cm}$. Jeśli brać pod uwagę tylko oszczędność papieru, to jakie powinny być najbardziej dogodne wymiary strony?