

Zadanie domowe nr 6 - Całka nieoznaczona - część I

Zadanie 1. Dana jest funkcja f taka, że $f'(x) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$ oraz $f(\frac{\pi^2}{16}) = 0$. Oblicz $f(\frac{\pi^2}{36})$.

Zadanie 2. Oblicz całki.

$$\begin{aligned} a) \int \left(\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} + \frac{1}{x^3} \operatorname{ctg} \frac{2}{x^2} \right) dx & \quad b) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-9x^{12}}} \quad c) \int \frac{\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} \quad d) \int (x^5 + 2x^2 - 1) \operatorname{arctg} x dx \\ e) \int \frac{e^{2x} + 4e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}} dx & \quad f) \int 2^{\sin^3 x} \sin^5 x \cos x dx \quad g) \int \cos(\ln x) dx \end{aligned}$$

Zadanie 3. Podaj postaci rozkładu na ułamki podstawowe oraz na ułamki proste (bez wyliczania współczynników) funkcji f danej wzorem

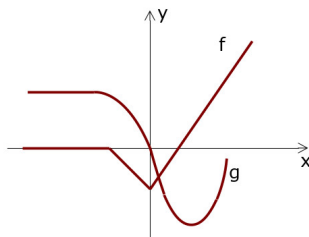
$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2(x+5)^3(x^2+7)^2(x^2+2x+15)}.$$

Zadanie 4. Oblicz całki.

$$a) \int \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx \quad b) \int \frac{x^6-8x^3+x^2-4}{x^4-8x} dx$$

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 5. Poniższy rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji oraz jej pierwotnej. Wskaż funkcję pierwotną.



Zadanie 6. Znajdź wielomian $w \in \mathbb{R}[x]$ możliwie najniższego stopnia i taki, że $P = (2, w(2))$ jest punktem przecięcia wykresu funkcji $y = w(x)$ oraz $w(2) = 1, w'(2) = 2$.

Zadanie 7. Obliczamy $\int \frac{dx}{x}$ stosując wzór na całkowanie przez części.

$$\int \frac{dx}{x} = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{dx}{x}.$$

Stąd wnioskujemy $0 = 1$. Gdzie tkwi błąd?

Zadanie 8. Oblicz całki.

$$a) \int \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} \cdot e^{\sin x} dx \quad b) \int \frac{\sqrt{x^2+1} (\ln(x^2+1) - 2 \ln x)}{x^4} dx$$

WSKAZÓWKI: a) Przedstaw całkę jako różnicę dwóch całek i do każdej z nich zastosuj wzór na całkowanie przez części. b) Zapisz całkę w postaci $\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \frac{1}{x^3} dx$.

Zadanie 9. Całka $\int \frac{1+2x^2}{x^5(1+x^2)^3} dx$ wymagałaby przy rozkładzie na ułamki proste rozwiązywania układu wielu równań. Zauważ, że

$$\int \frac{1+2x^2}{x^5(1+x^2)^3} dx = \int \frac{x+2x^3}{x^6(1+x^2)^3} dx = \int \frac{x+2x^3}{(x^2+x^4)^3} dx$$

i oblicz ją prościej podstawiając $t = x^2 + x^4$.