

## Zadanie domowe nr 8

### Całka oznaczona i niewłaściwa - zastosowania geometryczne

**Zadanie 1.** Korzystając z definicji całki oznaczonej, oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \dots (1 + \frac{n}{n})]$ .

**Zadanie 2.** W dogodny sposób oblicz całki (o ile są zbieżne).

$$\begin{aligned} a) \int_0^\pi x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x) dx \quad & a) \int_{-1}^0 x^2 \sqrt{1-5x} dx \quad & b) \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx \\ c) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^{17}+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2} dx \quad & d) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx \quad & b) \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx \end{aligned}$$

**Zadanie 3.** a) Oblicz pole obszaru ograniczonych krzywymi o równaniach  $x = 1$ ,  $y = xe^x$  oraz styczną do krzywej  $y = xe^x$  w punkcie  $P = (\ln 2, \ln 4)$ .

b) Naskicuj kształt krzywej  $\Gamma$ . Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą  $\Gamma$  i osią  $Ox$ .

$$\Gamma: \quad x = t^2, \quad y = t - \frac{1}{3}t^3, \quad t \geq 0$$

c) Naskicuj kształt podanych krzywych i oblicz pole obszaru ograniczonego tymi krzywymi (wewnątrz krzywych).

$$r = \sqrt{3} \sin \varphi, \quad r = 1 + \cos \varphi$$

**Zadanie 4.** Oblicz długość łuku krzywej  $\Gamma$ .

$$\Gamma: x(t) = 5 \cos t(1 + \cos t), \quad y(t) = 5 \sin t(1 + \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

**Zadanie 5.** Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi  $Ox$  figury ograniczonej krzywymi

$$y = \sqrt{\arctg x}, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

---

### Zadania nieobowiązkowe

**Zadanie 6.** Ustaw podane liczby w ciąg rosnący.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h}, \quad \ln \frac{2}{6}, \quad 0, \quad \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 6, \quad \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5, \quad \sum_{k=0}^7 \frac{\ln(2 + \frac{k}{2})}{2}, \quad \int_2^6 \ln x dx$$

**Zadanie 7.** a) Sprawdź za pomocą bezpośredniego rachunku, że  $(\frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2})' = \frac{1}{1+x^2}$ .

b) Przeprowadzono następujący rachunek.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (\arctg(-\sqrt{3}) - \arctg 0) = -\frac{\pi}{6}$$

Ale przecież całka funkcji stale dodatniej nie może być ujemna. Wyjaśnij błąd w powyższym rozumowaniu.

**Zadanie 8.** Niech  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  taka, że  $f(1) = f(2) = 2$ ,  $f'(1) = 6$ ,  $f'(2) = 5$ ,  $f''(1) = 3$ ,  $f''(2) = 5$ . Uzasadnij, że  $\int_1^2 f(x)f''(x)dx \leq 2$ .

*WSKAZÓWKA: Zastosuj wzór na całkowanie przez części.*

**Zadanie 9.** Korzystając z reguły de l'Hôpitala, oblicz granicę.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x t^t dt}{x^{x+1} - 1}$$

**Zadanie 10.** Dla pewnego  $a \in \mathbb{R}$  całka  $\int_0^\infty \left( \frac{ax^3}{x^4+2} - \frac{1}{8x+5} \right) dx$  jest zbieżna. Wyznacz takie  $a \in \mathbb{R}$  i oblicz całkę.