

Zadanie domowe nr 9 - Funkcje wielu zmiennych - część I

Zadanie 1. Uzasadnij, że nie istnieją granice podwójne:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, za pomocą definicji Heinego, tj. wybierając odpowiednio dwa ciągi,
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{|x|+|y|}$, zawężając dziedzinę funkcji do dwóch odpowiednio wybranych krzywych,
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$, używając współrzędnych biegunowych,
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y}{2x+y^3}$, obliczając granice iterowane.

Zadanie 2. Oblicz granice.

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctg(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x-y}$ c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(y-2)^2 \ln x}{(x-1)^2+(y-2)^2}$
- d) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\sqrt{3},0,0)} \frac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 y^4 z^6 + 1} - 2}{(x-\sqrt{3})^2 + z^{10}}$

Zadanie 3. Zaniedbując dziedzinę, oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f .

- a) $f(x, y, z) = (2x + 3z)^{yz}$ b) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^7 + y^2} \cdot \ln \frac{x}{y+2} - (\arctg(\pi x^2 + e))^{\sin(y+1)}$

Zadanie 4. Oblicz wskazane pochodne cząstkowe.

- a) $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, dla $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$
- b) $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$, dla $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^7+2y^7+3z^7}{x^6+y^6+z^6} & ; (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & ; (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

Zadanie 5. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = (x+1)^y \cdot y^{x+1}$ w punkcie $P_0 = (1, 1)$ w kierunku wektora $\vec{v} = [-3, 4]$.

Zadanie 6. Znajdź płaszczyznę styczną π_s do powierzchni Σ : $z = (2 + x - 3y)^4$ w punkcie przecięcia Σ z osią Oz .

Zadania nieobowiązkowe

Zadanie 7. Naskicuj kilka poziomic funkcji f danej wzorem $f(x, y) = e^{-x^2-(y-1)^2}$ i na tej podstawie wskaż punkt, w którym f osiąga ekstremum lokalne.

Zadanie 8. Zbadaj ciągłość funkcji f danej wzorem $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & ; x \geq 0 \\ 2 & ; x < 0 \end{cases}$ w całej dziedzinie.

Zadanie 9. Funkcja f dana jest wzorem $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 8y^3}$.

- a) Korzystając z definicji, zbadaj różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0, 0)$.

b) Czy do obliczenia pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie $(0, 0)$ w kierunku wektora $v = [1, 1]$ można wykorzystać gradient funkcji f ?