ALGEBRA – Zadanie domowe nr 2

Zad.1

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & p & 1 \end{bmatrix}$ A odwracalna gdy $\det A \neq 0$

$\det A = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & p & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3p - 2p + 3 = p + 4 \neq 0$

dla $p \neq -4$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & p & 6 \\ 3 & p+7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ $r(A) = 4 \iff \det A \neq 0$

$\det A \underset{\substack{W_2 - 2W_1 \\ W_3 - W_1 \\ W_4 - 3W_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & p+1 & 5 \\ 0 & p+1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{W_3 - W_2 \\ W_4 - W_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & p-2 & 0 \\ 0 & p & 2-p & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & p-2 & 0 \\ p & (2-p) & 0 \end{vmatrix} = -5p(p-2)$

$p \neq 0$, $p \neq 2$

c) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{3 \cdot W_1} \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 3a & 3b & 3c \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{W_2 - W_3} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 3a-g & 3b-h & 3c-i \\ g & h & i \end{bmatrix} = B$

$\det A = 2$ $\quad \det B = \det A \cdot 3 \cdot (-1) = -6$

Zad.2

a) $A \in M_6(\mathbb{R})$ $\quad A^3 - 4A^T = 0$ $\quad \det A = ?$

$A^3 = 4A^T \Rightarrow \det(A^3) = \det(4A^T) \iff (\det A)^3 = 4^6 \det A$

$\det A \cdot [(\det A)^2 - 4^6] = 0$ $\quad \det A = 0 \ \vee \ (\det A)^2 = 4^6$, $\det A = \pm 4^3$

$0, 64, -64$

b) $B, C \in M_4(\mathbb{R})$ $\quad \det B = 16$

$B \xrightarrow[\substack{\frac{1}{4} W_3 \\ W_2 + W_1}]{K_1 \leftrightarrow K_4} C$ $\quad \det C = \det B \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} = -4$

c) $D, E \in M_3(\mathbb{R})$, $\det D = 5$, $\det(DE) =$ nieosobliwe

$\det(E^{-1} D^{-1} 2 D^T) = \det(E^{-1} D^{-1}) \cdot \det(2D^T) = 3$

$= \det((DE)^{-1}) \cdot 2^3 \det D = \frac{1}{\det(DE)} \cdot 8 \det D = \frac{8 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3}$

Zad.6

$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = a \\ x + y = a \end{cases}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$U = [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{array}\right]$ $\quad r(A) = 2 \ \forall a$

$\det U = -a^2 + 2 + a + 1 - a^2 - 2a = -2a^2 - a + 3 = -(2a+3)(a-1)$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{3}{2}\}$ $\det U \neq 0 \Rightarrow r(U) = 3 \neq r(A)$ układ sprzeczny

$a \in \{-1, -\frac{3}{2}\}$ $\quad r(U) = 2 = r(A) = n$ $\Rightarrow$ układ oznaczony

a) PRAWDA $\quad$ b) PRAWDA $\quad$ c) FAŁSZ

Zad.7

a) Zbiór macierzy diagonalnych nieosobliwych z $M_n(\mathbb{R})$ → na diagonali nie ma zera

FAŁSZ

$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n b_n \end{bmatrix}$

mnożenie – przemienne dla diagonalnych, łączne

$a_k \cdot b_k \neq 0$ dla $a_k \neq 0, b_k \neq 0$

← diagonalna, nieosobliwa

I_n – el. neutralny, $\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$ ($a_k \neq 0$) OK

GRUPA PRZEMIENNA !

b) $F \in M_5(\mathbb{R})$ nieosobliwa tj. $\det F \neq 0 \Rightarrow \det(F^{526}) = (\det F)^{526} \neq 0 \iff F^{526}$ odwracalna PRAWDA

c) A – symetryczna i nieosobliwa $\Rightarrow \exists A^{-1}$, czy A^{-1} symetryczna ?

A – symetryczna tj. $A = A^T \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ tzn. A^{-1} symetryczna PRAWDA

d) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad (A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$ FAŁSZ

$AB - BA \neq 0$

e) $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \forall B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ układ $AX = B$ jest nieoznaczony ? FAŁSZ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ układ sprzeczny

---

Zad.8 $A \in M_6(\mathbb{R})$ trójkątna górna, el. na diagonali są sobie równe

$A = \begin{bmatrix} a & & & & & 2 \\ & a & & & & \\ & & a & & & \\ & & & a & & \\ & & & & a & \\ 0 & & & & & a \end{bmatrix}$

I. $\det A = a^6 \neq 0 \iff a \neq 0$ nie zawsze FAŁSZ

II. $\det A = a^6 = 64 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 6a = \pm 12$ FAŁSZ

III. A – antysymetryczna $\iff A^T = -A$ PRAWDA

$\begin{bmatrix} a & & & & & ? \\ & a & & & & \\ & & a & & & \\ & & & a & & \\ & & & & a & \\ ? & & & & & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & & & & & -? \\ & -a & & & & \\ & & -a & & & \\ & & & -a & & \\ & & & & -a & \\ 0 & & & & & -a \end{bmatrix}$ $\Rightarrow a = -a$, $a = 0$, $? = 0$ $\Rightarrow A = 0$

ODPOWIEDŹ B

Algebra – Zad. domowe nr. 2 – Macierze i ukł. równań liniowych

Zad. 4 Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 4w = 4 \\ 4x + 5y + 6z + 3w = 5 \\ 5x + 3y + 9z + 9w = -9 \end{cases}$$

$$[A|U] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 9 & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3-4W_1,\ W_5-5W_1]{W_2-3W_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[W_4+2W_2]{W_3-W_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3\cdot(-1)]{W_4-3\cdot W_3}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4\cdot(-\frac{1}{4})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_2+5W_4,\ W_1-3W_4]{W_3-4W_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_1-2W_3]{W_2+W_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{W_1-W_2} \left[\begin{array}{c|c} I_4 & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

Odp. $x = 3,\ y = 4,\ z = -5,\ w = 1$

ukł. oznaczony

Zad. 5 Ilości rozwiązań w zależności od $p \in \mathbb{R}$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3p & 6 & 3 & 0 & 6 \\ p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ p & 2 & p-1 & 1 & 1 \\ 2p & 4 & 2 & p-3 & 2p-2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ p & 2 & p-1 & 1 & 1 \\ 2p & 4 & 2 & p-3 & 2p-2 \\ 3p & 6 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3-2W_1,\ W_4-3W_1]{W_2-W_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 2-2p & -4 & p-5 & 2p-14 \\ 0 & 3-3p & -6 & -3 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[W_4-3W_2]{W_3-2W_2} \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2p & p-5 & 2p-4 \\ 0 & 0 & 6-3p & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[W_4\cdot\frac{1}{3}]{W_3\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2-p & \frac{1}{2}p-\frac{5}{2} & p-2 \\ 0 & 0 & 2-p & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4-W_3} \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1-p & p-4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2-p & \frac{1}{2}p-\frac{5}{2} & p-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}p+\frac{3}{2} & 3-p \end{array}\right]$$

$p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ układ oznaczony $r(U) = r(A) = 4 = n$

jedno rozw.

$p = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[W_4\cdot\frac{2}{3}]{W_2-W_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3+\frac{5}{2}W_4]{W_2+W_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$-2 + \frac{5}{2}\cdot 2 = 3$

$2x = 3$

$7z = -9$

Sprzeczny!

$p=1$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3+3W_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$\begin{cases} w=2 \\ 6w=8 \end{cases}$ sprzeczny

$p=2$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$ sprzeczny $\begin{cases} z=0 \\ \frac{1}{2}z=1 \end{cases}$ brak rozw.

$p=3$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $r(U)=r(A)=3<n=4$

nieok. ni. oznaczony

Nieskończenie wiele rozw. zależnych od 1 parametru

Zad. 3 $(X+I)^T \cdot A = 2A - I \quad / \cdot A^{-1}$

$(X+I)^T = (2A-I)A^{-1} = 2I - A^{-1} \quad / \,^T$

$X+I = (2I - A^{-1})^T = 2I - (A^{-1})^T$

$X = I - (A^{-1})^T$

$A \in M_4(\mathbb{R})$

$A = [a_{ij}]$

$a_{ij} = \begin{cases} 2i+j & ; \ i=j \\ 3 & ; \ i \neq j \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ $A = 3 \cdot B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = (3B)^{-1} = 3^{-1} \cdot B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot B^{-1}$ $\quad B^{-1} = ?$

$[B|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_4-W_1]{W_2-W_1,\ W_3-W_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_4 \cdot \frac{1}{3}]{W_3 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{W_1-W_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1-W_2-W_3} \left[\begin{array}{c|cccc} I & 17/6 & -1 & -1/2 & -1/3 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ & \underbrace{-1/3 \quad 0 \quad 0}_{B^{-1}} & & & 1/3 \end{array}\right]$

$X = I - \left(\frac{1}{3}B^{-1}\right)^T = I - \frac{1}{3} \cdot (B^{-1})^T = I - \begin{bmatrix} 17/18 & -1/3 & -1/6 & -1/9 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ -1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/3 & 1/6 & 1/9 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \end{bmatrix}$