ALGEBRA - Zadanie domowe nr 4 - Przestrzenie wektorowe

Zad. 1 Czy to podprzestrzeń liniowa ?

a) $\mathbb{R}^2 \supset U = \{(x,y) : x = 4y^2\}$ NIE $(4,1) \in U \wedge (16,2) \in U$
ale $(4,1) + (16,2) = (20,3) \notin U$ bo $20 \neq 4 \cdot 3^2$

b) $\mathbb{R}^3 \supset U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 = 0\}$ $x^2 + y^4 = 0 \iff x^2 = 0 \wedge y^4 = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$
Zatem $U = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$
Jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^3$ $\forall (0,0,z_1), (0,0,z_2) \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\alpha(0,0,z_1) + \beta(0,0,z_2) = (0,0,\alpha z_1 + \beta z_2) \in U$

c) $\mathbb{R}^2 \supset U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0\}$

$\ln(1 - x^2 - y^2) \geq 0 = \ln 1 \iff 1 - x^2 - y^2 \geq 1 \iff x^2 + y^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$
Zatem $U = \{(0,0)\}$ i jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^2$ (trywialna)

d) $\mathbb{R}^4 \supset U = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$

NIE jest to podprz. liniowa $x = y = 0$ $(0,0,0,1) \in U$
$x = y = 1$ $(2,2,0,1) \in U$
$(0,0,0,1) + (2,2,0,1) = (2,2,0,\underset{\neq 1}{2}) \notin U$

e) $\mathbb{R}^3 \supset U = \{(x,y,z) : x + 2y - 3z = 0 \text{ lub } 3x - 2y = 0\}$
NIE jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}^3$

$(2,3,5) \in U$ bowiem $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$
$(8,8,8) \in U$ bowiem $8 + 2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 0$
$(2,3,5) + (8,8,8) = (10,11,13) \notin U$ bowiem $3 \cdot 10 - 2 \cdot 11 \neq 0 \wedge 10 + 2 \cdot 11 - 3 \cdot 13 \neq 0$

f) $\mathbb{R}[x] \supset U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f = 11\}$ Nie jest to podprz. liniowa $\mathbb{R}[x]$
$f(x) = x^{11} + 10$, $g(x) = -x^{11} - x^2$ $f \in U$, $g \in U$
$f + g \notin U$ bowiem $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 10 - x^2$, $\deg(f+g) = 2 \neq 11$

Zad. 2 a) Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ układ $\{u, v, w\}$ jest liniowo niezależny?
$u = (1,0,2,1,2)$, $v = (2,1,1,2,1)$, $w = (5,1,7,5,p) \in \mathbb{R}^5$

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & p \end{bmatrix} \underset{\substack{W_2 - 2W_1 \\ W_3 - 5W_1}}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & p-10 \end{bmatrix} \underset{W_3 - W_2}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-7 \end{bmatrix}$$

dla $p \neq 7$ układ liniowo niezależny

b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 5y - z + 4t = x - 6y + z + 5t = 0\}$ Baza W ?

$$\begin{cases} x - 5y - z + 4t = 0 \\ x - 6y + z + 5t = 0 \end{cases}$$ Dodając stronami: $\rightarrow \begin{cases} 2x - 11y + 9t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{11}{2}y - \frac{9}{2}t = 11z + t$
Odejmując stronami: $\rightarrow \quad y = 2z + t$

$W = \{(11z + t, 2z + t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} = \{(11,2,1,0)z + (1,1,0,1)t ; z, t \in \mathbb{R}\}$
$= \operatorname{lin}\{(11,2,1,0), (1,1,0,1)\}$
liniowo niezależne $\rightarrow$ baza $\{(11,2,1,0), (1,1,0,1)\}$

c) $\{u_1, u_2\}$ uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^4$
$u_1 = (1,2,3,4)$, $u_2 = (2,4,7,0)$
Niech $u_3 = (a,b,c,d)$, $u_4 = (x,y,z,t)$
$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ to baza $\mathbb{R}^4$ wtw gdy jest liniowo niezależny

$\iff 4 = r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \underset{W_2 - 2W_1}{=} r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$

Wystarczy wybrać $u_3 = (0,1,0,0)$, $u_4 = (0,0,0,1)$

Zad. 2

d) $\mathcal{U} = \operatorname{lin}\{(1,3,2,1), (1,2,1,1), (1,1,0,1), (1,2,2,1), (3,4,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$

- Baza i wymiar $\mathcal{U}$?
- Czy $v = (4,10,9,4) \in \mathcal{U}$? Jego współrzędne w bazie $\mathcal{U}$?

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \mathcal{U} \le 4$ ← 5 generatorów Nie mogą być liniowo niezależne.

$$r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\1&2&1&1\\1&1&0&1\\1&2&2&1\\3&4&1&3\end{bmatrix} \overset{\substack{W_2-W_1\\W_3-W_1\\W_4-W_1\\W_5-3W_1}}{=} r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&0\\0&-2&-2&0\\0&-1&0&0\\0&-5&-5&0\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix} \overset{W_2\leftrightarrow W_3}{=} r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&0&0\\0&-1&-1&0\end{bmatrix} \overset{W_3-W_2}{=} r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix} = 3$$

Baza $\mathcal{U}$: $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ $b_1 = (1,3,2,1)$, $b_2 = (0,1,0,0)$, $b_3 = (0,0,1,0)$

$\dim \mathcal{U} = 3$

Czy $v \in \mathcal{U}$?

$$r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\4&10&9&4\end{bmatrix} \overset{W_4-4W_1}{=} r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-2&1&0\end{bmatrix} \overset{W_4+2W_2}{=} r\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v \in \mathcal{U}$$

bo $\{v, b_1, b_2, b_3\}$ liniowo zależny

$v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}}$ $v = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = (4,10,9,4)$

$\alpha(1,3,2,1) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0) = (\alpha, 3\alpha+\beta, 2\alpha+\gamma, \alpha) = (4,10,9,4)$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ 3\alpha+\beta = 10\\ 2\alpha+\gamma = 9\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\beta = 10-3\alpha = -2\\ \gamma = 9-2\alpha = 1\end{matrix}$ $v = [4, -2, 1]_{\mathcal{B}}$

Zad. 3

a) $\mathcal{U} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : -3p(1) + 2p(0) = 0\}$

Uzasadnij, że to podprz. liniowa $\mathbb{R}_2[x]$ generatory, baza, wymiar

- JEST to podprz. liniowa $\mathbb{R}_2[x]$

$\forall p, q \in \mathcal{U}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $-3(\alpha p + \beta q)(1) + 2(\alpha p + \beta q)(0) =$

$= -3[\alpha \cdot p(1) + \beta \cdot q(1)] + 2[\alpha \cdot p(0) + \beta \cdot q(0)] =$

$= \alpha \cdot \underbrace{[-3p(1) + 2p(0)]}_{=0 \text{ bo } p \in \mathcal{U}} + \beta \cdot \underbrace{[-3q(1) + 2q(0)]}_{=0 \text{ bo } q \in \mathcal{U}} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

$\Downarrow$

$\alpha p + \beta q \in \mathcal{U}$

- $p \in \mathbb{R}_2[x]$ $p(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

$p \in \mathcal{U} \Rightarrow 0 = -3p(1) + 2p(0) = -3 \cdot [a+b+c] + 2 \cdot c = -3a - 3b - c \Rightarrow c = -3(a+b)$

$p \in \mathcal{U} \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx - 3a - 3b = a(x^2 - 3) + b(x-3)$

$\{x^2-3, x-3\}$ generatory $\mathcal{U}$ $\mathcal{U} = \operatorname{lin}\{x^2-3, x-3\}$

ale i baza, bo są liniowo niezależne $\Rightarrow \dim \mathcal{U} = 2$

b) $\mathbb{R}_3[x] \supset W = \operatorname{lin}\{p, q, r, s\}$ $p(x) = x^2 + x - 1$, $q(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 2$

$r(x) = x^3 + 3x - 5$, $s(x) = x^2 + 2x + 2$

$\dim W = ?$

$$r\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\2&1&5&-2\\1&0&3&-5\\0&1&2&2\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}1&0&3&-5\\0&1&1&-1\\0&1&2&2\\2&1&5&-2\end{bmatrix} \overset{\substack{W_4-W_1\\W_3-W_2}}{=} r\begin{bmatrix}1&0&3&-5\\0&1&1&-1\\0&0&1&-3\\0&1&-1&8\end{bmatrix} \overset{W_4-W_2}{=} r\begin{bmatrix}1&0&3&-5\\0&1&1&-1\\0&0&1&-3\\0&0&-2&9\end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \dim W = 3$$

c) $a \in \mathbb{R}$ Kiedy $\{p, q, r\}$ jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$?

$p(x) = x^2 - 2x + 3$, $q(x) = 2x^2 - x + 1$, $r(x) = x^2 + ax + a$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 \Rightarrow \{p, q, r\}$ baza $\mathbb{R}_2[x]$ wtw gdy $r\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&-1&2\\a&a&1\end{bmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&-1&2\\a&a&1\end{vmatrix} = -3 + a - 4a + a - 6a + 2 = -1 - 8a \neq 0 \Leftrightarrow 8a \neq -1$$

$$a \neq -\frac{1}{8}$$

Zad. 4 $p(x) = 1+x$, $q(x) = 2-3x$, $r(x) = 3-x+5x^2$

a) $\mathcal{B}' = (p, q, r)$ to baza $\mathbb{R}_2[x]$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, zatem $\mathcal{B}'$ to baza jeśli tylko układ $\{p, q, r\}$ jest liniowo niezależny

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{W_2-2W_1 \\ W_3-3W_1}}{=\!=} r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = 3 \quad \text{bowiem} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

$\mathcal{B}_k = (1, x, x^2)$

b) $P = P_{\mathcal{B}_k \to \mathcal{B}'}$ $\quad p = [1,1,0]_{\mathcal{B}_k}$ $\quad q = [2,-3,0]_{\mathcal{B}_k}$, $r = [3,-1,5]_{\mathcal{B}_k}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) $w = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x - 5x^2$ $\quad w = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'} = ?$ $\quad w = \left[\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -5\right]_{\mathcal{B}_k}$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -5 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad PX' = X \quad X' = P^{-1}X$$

$P^{-1} = ?$ ĆWICZENIE! $P^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{25}$

$$X' = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15 & 10 & -7 \\ 5 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -5 \end{bmatrix} \overset{\text{ĆW}}{=\!=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zad. 5 Prawda / fałsz

a) Każda podprz. liniowa zawiera wektor zerowy. PRAWDA

b) Dowolna baza $\mathbb{R}_5[x]$ jest 5-elementowa. FAŁSZ $\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$

c) $\dim M_{3\times 5}(\mathbb{R}) = 15$ PRAWDA $3 \cdot 5 = 15$

d) FAŁSZ, $(0,0,0) \notin \pi$ e) PRAWDA f) PRAWDA g) FAŁSZ Musiałaby to być BAZA

h) FAŁSZ przestrzenie są ROZŁĄCZNE

Zaś rozwiązania ukł. niejednorodnego to suma rozw. ogólnego rów. jednorodnego $y = \alpha \cdot x + \beta$ plus jedno rozw. układu niejednorodnego

---

Zad. 6

a) $\mathbb{C}^3 = (\mathbb{C}^3, +, \mathbb{C}, \cdot)$ $\quad u = (i, 1, 0)$, $v = (i+2, 5, 0)$, $w = (3, 2, 0)$

Czy liniowo niezależne w $\mathbb{C}^3$?

NIE metoda I: $\begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ i+2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

metoda II $\quad \alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0) \not\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha(i,1,0) + \beta(i+2,5,0) + \gamma(3,2,0) = (\alpha i + \beta i + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 5\beta + 2\gamma, 0) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha i + \beta i + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -5\beta - 2\gamma$$

$$-5\beta i - 2\gamma i + \beta i + 2\beta + 3\gamma = -4\beta i + 2\beta + 3\gamma - 2\gamma i = 0$$

$$2\beta(1-2i) + (3-2i)\gamma = 0$$

$$\gamma = -2\beta\,\frac{1-2i}{3-2i}$$

$$\alpha = -5\beta + 4\beta\,\frac{1-2i}{3-2i}$$

Np. $\beta = 3-2i$, $\gamma = -2(1-2i)$, $\alpha = -5(3-2i) + 4(1-2i)$

b) $C((0,\infty), \mathbb{R}) = \{f : (0,\infty) \to \mathbb{R} : f \text{ ciągła}\}$

$f_1 = e^x$, $f_2 = \ln x$,

$c_1 f_1 + c_2 f_2 \equiv 0$

tj.: $\forall x > 0 \quad c_1 e^x + c_2 \ln x = 0$

Np. $x = 1$: $c_1 \cdot e = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$x = 2$ $\quad c_2 e^2 + c_2 \ln 2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \frac{e^2}{\ln 2} \Rightarrow c_2 = 0$

Zad. 7 $\mathcal{B} = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$

$\mathcal{B}' = ((1,1,0), (1,0,1), (0,1,1))$

$P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = ?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 - W_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[W_2 \cdot (-1)]{W_3 + W_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3 \cdot \frac{1}{2}]{W_2 + W_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} X = X' = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w = [4,2,1]_{\mathcal{B}'}$$