

$$\begin{aligned} \varphi(b_3) = \varphi(0, 0, 1) &= (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_C, & (0, 1) &= \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3) \\ & \Rightarrow \alpha_2 = 3, \beta_2 = -3, \varphi(b_2) = [3, -3]_C \\ & \Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \varphi(b_3) = [0, 1]_C \end{aligned}$$

$$M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obserwacja: Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

Uwaga 7.4.3. Odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$.

Uwaga 7.4.4. Rozważmy dwie przestrzenie liniowe V oraz W nad $\mathbb{R}$ takie, że $\dim V = n$ oraz $\dim W = m$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V , zaś $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W .

odwzorowanie liniowe

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

$$v \longmapsto w = \varphi(v)$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)} \mathbb{R}^m$$

$$[v_1, v_2, \dots, v_n]_{\mathcal{B}} \longmapsto [w_1, w_2, \dots, w_m]_{\mathcal{C}}$$

Przykład 7.4.5. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{C}_1[z] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$, względem baz standardowych danych przestrzeni $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$ oraz $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Weźmy dowolny $p \in \mathbb{C}_1[z]$. Jest on postaci $p(z) = \alpha z + \beta$.

Rozważamy bazę $\mathcal{B} = (1, z)$ przestrzeni $\mathbb{C}_1[z]$ oraz bazę $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ przestrzeni

$\{az+b \mid a,b \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}_1[x]$ wielom. stopnia ≤ 1 o współcz. $\in \mathbb{C}$

$$f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I$$

$M_2(\mathbb{C})$.

$$1 = 0 \cdot z + 1 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$f(1) = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1, 0, 0, 1]_C$$

$$f(z) = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = A = [2+i, 1, 3, 4-i]_C$$

$$\alpha = 1 \cdot z + 0 \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[z] = 2, \dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = 4, \Rightarrow M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{4 \times 2}(\mathbb{C}), M_f(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4-i \end{bmatrix}$$

4x2

Twierdzenie 7.4.6. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$ będą ustalonymi bazami przestrzeni V i W . Niech $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ Oznaczmy

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

gdzie $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}_V}$, $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{B}_W}$. Wówczas



$$\varphi(v) = w \Leftrightarrow AX = Y.$$

← BŁĘDZKA

Uwaga 7.4.7. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między odwzorowaniami liniowymi a macierzami (przy ustalonych bazach). Macierz odwzorowania liniowego φ w pełni opisuje to odwzorowanie, można zatem badać macierz, zamiast odwzorowania.

Wniosek 7.4.8. Rząd macierzy A przekształcenia liniowego φ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$. Ponadto $\text{rank}(\varphi) = \text{rank} A$.

$$\text{rk}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \varphi$$

Wniosek 7.4.9. Przyjmijmy oznaczenia jak w twierdzeniu 7.4.6. Wówczas

i) φ jest epimorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = m$, surjekt $\dim \text{Im } \varphi = \dim W$

ii) φ jest monomorfizmem $\Leftrightarrow r(A) = n$, injekt $\dim \text{Ker } \varphi = 0$

Tw. o rządzie

$$\dim V = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$$

$$\dim W = m$$

Przykład 7.4.2 - ciąg dalszy

$$r(\varphi) = r(A)$$

Oblicz $\varphi(1, 2, 3)$ dwoma sposobami, za pomocą macierzy $M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$ oraz za pomocą $M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Czy φ jest monomorfizmem / epimorfizmem?

$$\text{Oznaczmy } A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A' = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sprawdzenie } \varphi(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 2) = (3, 7)$$

90

KONWENCJA

()

$\mathcal{B}_k^2$

podaj współrzędne wektora

w bazie $\mathcal{B}$

odpowiedź - wynik w bazie $\mathcal{C}$.

$$\varphi(1,2,3)$$

$$(1,2,3) = 1(1,2,0) + 3(0,0,1) = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_3 = [1,0,3]_{\mathcal{B}}$$

$$A' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Stąd } \varphi(1,2,3) = [3,1]_{\mathcal{C}} = 3c_1 + c_2 = 3(1,2) + (0,1) = (3,7).$$

Dodatkowo zauważmy, że $r(A) = r(A') = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, zatem φ jest epimorfizmem.

Ponadto $\dim \text{Ker} \varphi = 3 - 2 = 1$ więc φ nie jest monomorfizmem.

$$\text{Wzrost} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im } \varphi$$

$$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$$

$$c_1 = (1,2)$$

$$c_2 = (0,1)$$

$$(1,2,0) = b_1$$

$$(1,1,1) = b_2$$

$$(0,0,1) = b_3$$

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $\alpha \in K$, $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Twierdzenie 7.4.10. Przy powyższych założeniach

$$A + B = M_{f+g}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \quad \text{oraz} \quad \alpha A = M_{\alpha f}(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W).$$

Twierdzenie 7.4.11. Jeśli $\dim V = \dim W$ to wówczas następujące warunki są równoważne.

i) f jest izomorfizmem

ii) $\text{Ker } f = \{0_V\}$

iii) $\text{Im } f = W$

iv) $r(A) = \dim V$

v) $\det A \neq 0$

$$\varphi: V \rightarrow W$$

$$A_{m \times m} \quad m=n \quad \text{kwadratowa!}$$

$$\text{np. } \varphi: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \dim V = \dim W = 3$$

Wniosek 7.4.12. Niech $f \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem oraz niech $A = M_f(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas $A^{-1} = M_{f^{-1}}(\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$.

Twierdzenie 7.4.13. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ będą ustalonymi bazami. Ponadto niech $f \in \mathcal{L}(U, V)$, $g \in \mathcal{L}(V, W)$ oraz $A = M_f(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, $B = M_g(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$. Wówczas

$$M_{g \circ f} = B \cdot A = M_{g \circ f}(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W).$$

$$g \circ f$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Przykład 7.4.14. Dane są odwzorowania liniowe

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z),$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (x - 3z, x + y),$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Za pomocą rachunku macierzowego wyznaczyć wzór odwzorowania

$$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f + g) \text{ i obliczyć } \varphi(1, 2, 3).$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_g := M_g(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(1,0,0) \quad f(0,1,0)$$

$$f(0,0,1)$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (u, v)$$

$$\varphi = 2h^{-1} \circ h^{-1} \circ (f+g)$$

$$M_{f+g} := M_{f+g}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

data

Czy h jest odwracalne?

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_f := M_f(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_h = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det M_h = -3 \neq 0 \Rightarrow h$ jest odwracalne

$$M_{h^{-1}} := M_{h^{-1}}(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) \in M_2(\mathbb{R}), \quad M_{h^{-1}} = (M_h)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_\varphi := M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$M_\varphi = 2M_{h^{-1}}M_{f+g} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(x, y, z) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3x - 5y - 5z \\ 3x + 16y - 7z \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}y - \frac{10}{9}z, \frac{2}{3}x + \frac{32}{9}y - \frac{14}{9}z \right)$$

$$\varphi(1, 2, 3) = ?$$

$$M_\varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -22 \\ 56 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(1, 2, 3) = \left(-\frac{44}{9}, \frac{112}{9} \right)$$

Uwaga 7.4.15. Niech V będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{B}'$ jej dwiema bazami. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania identycznościowego $\text{id}: V \rightarrow V$ przestrzeni V z bazą $\mathcal{B}'$ w przestrzeń V z bazą $\mathcal{B}$.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$. Wówczas

$$\begin{cases} \text{id}(b'_1) = b'_1 = a_{11}b_1 + \dots + a_{n1}b_n \\ \dots \\ \text{id}(b'_n) = b'_n = a_{1n}b_1 + \dots + a_{nn}b_n \end{cases}, \text{ skąd } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M_{\text{id}}(\mathcal{B}', \mathcal{B}). \quad \square$$

7.5 Zmiana baz

Twierdzenie 7.5.1. Niech V oraz W będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem K . Niech $\mathcal{B}_V$ oraz $\mathcal{B}_W$ będą bazami przestrzeni V i W . Rozważmy nowe bazy $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ oraz odwzorowanie liniowe $\varphi: V \rightarrow W$. Niech $P = P_{\mathcal{B}_V \rightarrow \mathcal{B}'_V}$, $Q = P_{\mathcal{B}_W \rightarrow \mathcal{B}'_W}$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$, $A' = M_\varphi(\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W)$. Wówczas

$$A' = Q^{-1}AP.$$

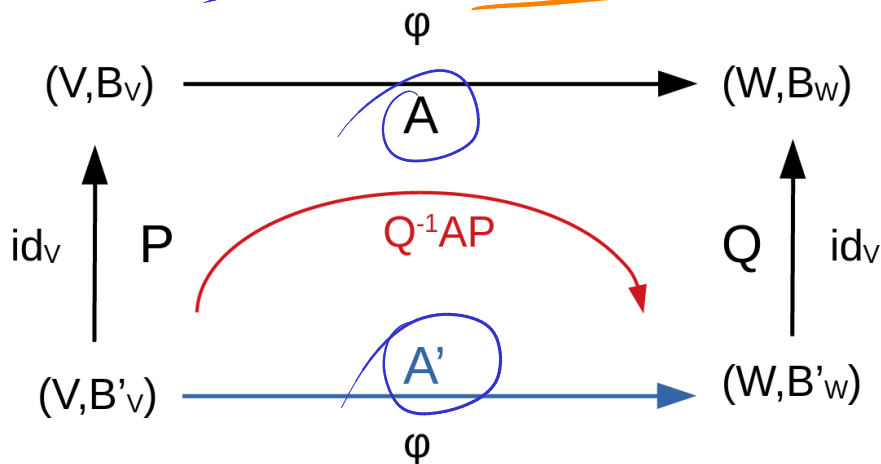
Dowód. Ponieważ $X = PX'$, $Y = QY'$, $AX = Y$, $A'X' = Y'$, zatem $QY' = Y = AX = APX' \Rightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. $\square$

Q - macierz przejścia
(zawsze niezerobliwa)

Jak się zmienia macierz odwzorowania

gdy zmieniają się bazy przestrzeni V, W

$$M_{id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$



Przykład 7.4.2 raz jeszcze

Korzystając ze wzoru na zmianę macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie baz, wyznaczmy macierz $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ w bazach $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1))$, $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$.

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = ?$$

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = P_{\mathcal{B}_k^2 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

tym razem oblicz A' korzystając z tw. 7.5.1

chw

to samo co wcześniej

Uwaga 7.5.2. Zmiana bazy prowadzi do liniowej zmiany zmiennych lub podstawienia liniowego. Równość $X = PX'$ oznacza, że każda ze zmiennych $x_1, \dots, x_n$ wyraża się jako kombinacja liniowa $x'_1, \dots, x'_n$. Ponieważ $\det P \neq 0$, możemy wywnioskować, że $X' = P^{-1}X$ i wyrazić każdą ze zmiennych $x'_1, \dots, x'_n$ jako kombinację liniową $x_1, \dots, x_n$.

W powyższym przykładzie zmiana baz w przestrzeniach $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ oznacza zmianę układów współrzędnych (a zatem zmianę zmiennych). Powoduje to zmianę przepisu odwzorowania φ , ale w żaden sposób nie wpływa na to jaki wektor $\varphi(v) \in \mathbb{R}^2$ jest przypisywany danemu wektorowi $v \in \mathbb{R}^3$.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad PX' = X,$$

współrz. w starej bazie

współrz. w nowej bazie

Korzystamy z równości $X' = P^{-1}X$. Obliczamy $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + y \\ 2x - y \\ -2x + y + z \end{bmatrix}.$$

Ponadto $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $Y' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$, $Y = QY' \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ 2a' + b' \end{bmatrix}.$

Korzystając z macierzy A oraz A' otrzymujemy

$(a, b) = \varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ oraz $(a', b') = \varphi(x', y', z') = (3x' + 3y', -2x' - 3y' + z')$.

Możemy sprawdzić, że

$$(a', b') = \varphi(x', y', z') = (3x' + 3y', -2x' - 3y' + z')$$

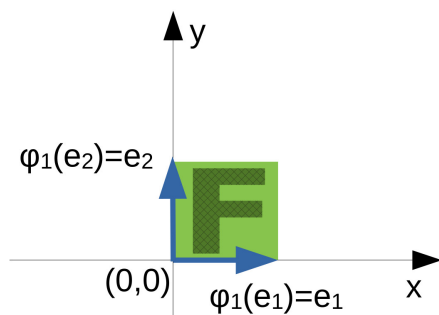
$$= (3(-x + y) + 3(2x - y), -2(-x + y) - 3(2x - y) + (-2x + y + z)) = (3x, -6x + 2y + z).$$

Stąd $a = a' = 3x$ oraz $b = 2a' + b' = 6x - 6x + 2y + z = 2y + z.$

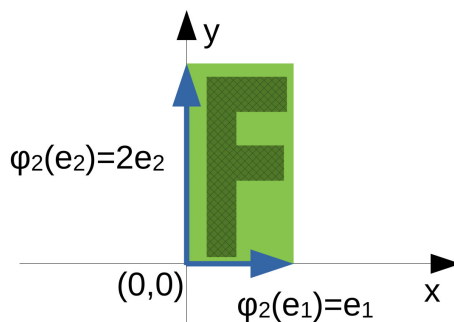
Przykład 7.5.3. Endomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}^2$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

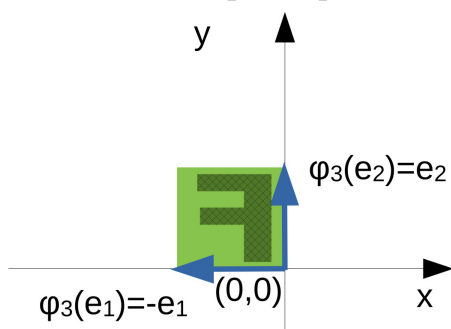
$$\begin{matrix} e_1 & \hat{=} \\ e_2 & \hat{=} \end{matrix}$$



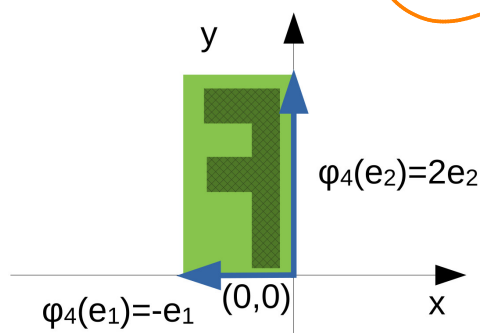
identyczność $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



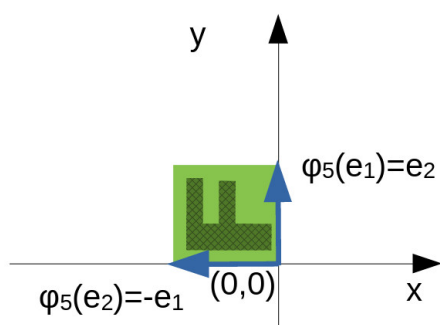
rozciąganie $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



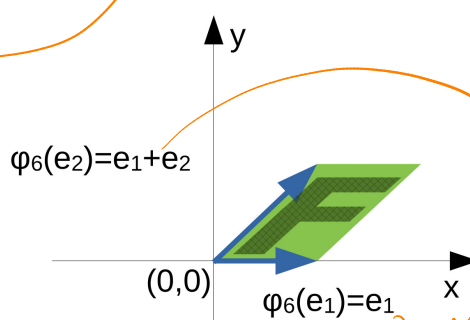
odbicie (symetria osiowa) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



rozciąganie i odbicie $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



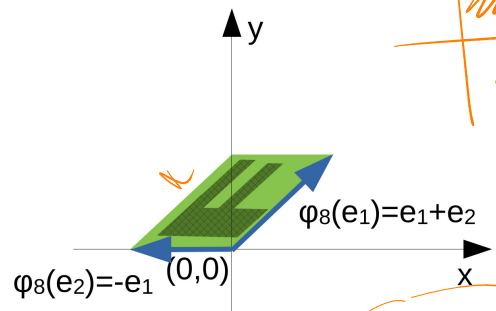
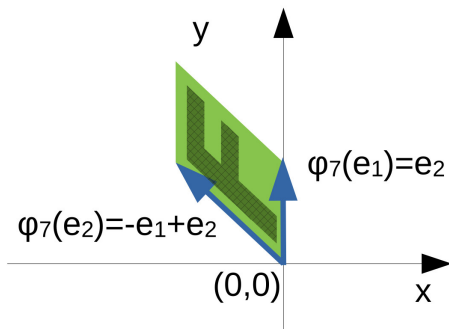
obróć (rotacja) o kąt $\frac{\pi}{2}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



powinowactwo ścinające (ang. shear) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

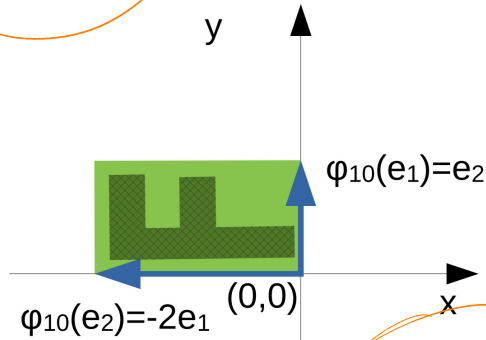
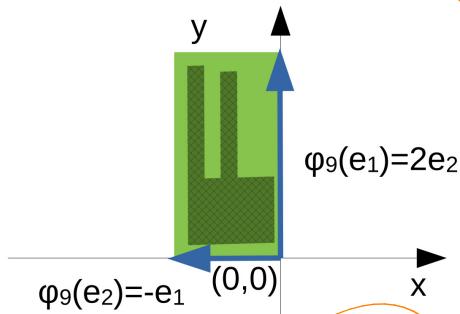
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$



$0 \leq x \leq 1$
 $0 \leq y \leq 1$

powinowactwo ścinające i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

rotacja i powinowactwo ścinające $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

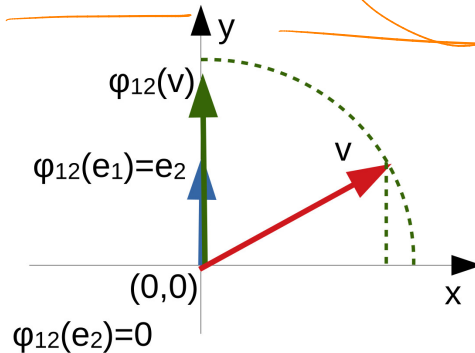
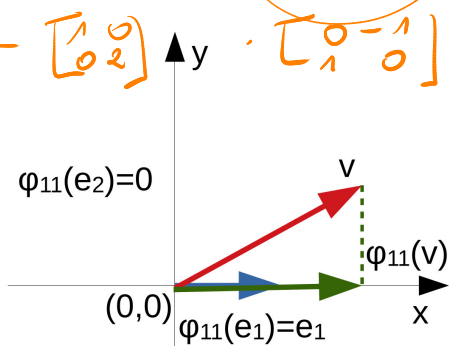


rotacja i rozciąganie $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

rozciąganie i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

wszystkie powyższe macierze są niesobliwe

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



rzutowanie (projekcja) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

projekcja i rotacja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

tu już nie

$\varphi(i) = \hat{i}$ $\varphi(j) = (0,0)$

Czym jest powinowactwo ścinające, dowiesz się tutaj.

7.6 Uwaga na temat rozwiązywania układów równań liniowych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz kolumna kolumna
współczynników niewiadomych wyrazów wolnych

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przy ustalonych bazach przestrzeni K^n, K^m macierz A jednoznacznie wyznacza odwzorowanie liniowe $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m$. Rozwiązywanie układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}$ polega na wyznaczeniu jądra $\text{Ker} \varphi_A$ odwzorowania φ_A .

Wniosek 7.6.1. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych $AX = \mathbf{0}$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem K . Jej wymiar jest równy $n - r(A)$.

W szczególności wektor zerowy zawsze należy do zbioru rozwiązań układu jednorodnego. Ponadto suma rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązaniem tegoż układu jednorodnego.

Twierdzenie 7.6.2. Niech $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ będzie jednym z rozwiązań niesprzecznego niejednorodnego układu równań liniowych $AX = B$. Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań układu $AX = B$ ma postać

$$\{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \text{ dowolne rozw. } AX = \mathbf{0}\}.$$

Przykład 7.6.3. Rozważmy raz jeszcze układ równań z przykładu 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u = 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u = 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u = 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u = 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Jak już wiemy, $r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ i jest to układ nieoznaczony, posiadający nieskoń-

czenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów. Rozwiązania są postaci

$$\begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} t=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

jedno równanie
nowe $AX=B$

komb. liniowa elementów
bazy pr. row. $AX=0$

Równoważnie

$$(x, y, z, t, u) = (11 - 2y, y, -3 + \frac{7}{3}t, 3 - \frac{8}{3}t) = (11, 0, -3, 0, 3) + (-2, 1, 0, 0, 0)y + (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})t.$$

Dla $y = 0$ i $t = 0$ otrzymujemy $(11, 0, -3, 0, 3)$ jako jedno z rozwiązań rozważanego układu.

Zbiór rozwiązań korespondującego układu jednorodnego jest przestrzenią liniową wymiaru 2, zaś układ wektorów $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (0, 0, \frac{7}{3}, 1, -\frac{8}{3})\}$ jest bazą tej przestrzeni.

TEMAT: Zagadnienie własne operatora liniowego

8.1 Wartości własne i wektory własne endomorfizmu

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

$\varphi: V \rightarrow V$
 $A = M_\varphi$ kwadratowa

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n . Oznaczmy $End(V) = \mathcal{L}(V, V)$. Endomorfizmy przestrzeni V nazywamy również operatorami liniowymi.

Twierdzenie 8.1.1. i) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \mathbb{R}, \cdot)$ wraz z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez liczbę jest przestrzenią wektorową wymiaru n^2 .

ii) Zbiór $End(V) = (End(V), +, \circ)$ wraz z działaniami dodawania i składania odwzorowań ma strukturę pierścienia nieprzemienne.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in End(V) \quad \alpha \cdot (f \circ g) = (\alpha \cdot f) \circ g = f \circ (\alpha \cdot g)$ ← z g. odnosz. obu struktur

Definicja 8.1.2. Podprzestrzeń liniową U przestrzeni V nazywamy niezmienniczą względem endomorfizmu $\varphi \in End(V)$ lub krótko φ -niezmienniczą, jeżeli

$$\varphi(U) \subset U, \quad \text{tzn.} \quad \forall u \in U \quad \varphi(u) \in U.$$

$\varphi: V \rightarrow V$

Przykład 8.1.3. 1) Niech $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(x, y, z) = (-y, x, z)$

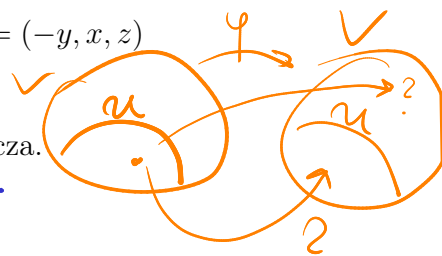
Zauważmy, że φ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz .

Zatem dla $(0, 0, t) \in U$ mamy $\varphi(0, 0, t) = (0, 0, t) \in U$ i U jest φ -niezmiennicza.

2) Niech $V, \varphi \in End(V)$ dowolne, $U = \text{Ker} \varphi$

Niech $u \in U$, wówczas $\varphi(u) = \mathbf{0}_V$. Oczywiście $\mathbf{0}_V \in U$, bowiem $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V$.

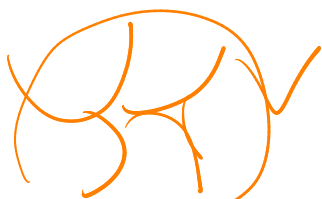
Zatem U jest φ -niezmiennicza.



$\psi = \varphi|_U$
 $\psi: U \rightarrow U$
 $\forall x \in U \quad \psi(x) = \varphi(x)$

Znaczenie podprzestrzeni niezmienniczych

Dla dowolnego endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ i dla dowolnej podprzestrzeni $U \subset V$, mamy $\varphi(U) \subset V$. Gdy U jest φ -niezmiennicza mamy $\varphi(U) \subset U$, zatem restrykcja $\varphi|_U: U \rightarrow U$, czyli



przeglądamy

$\varphi|_U \in \text{End}(U)$.

$$\varphi: V \rightarrow V$$

$$\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

Jeśli istnieje właściwa podprzestrzeń niezmiennicza $U \subset V$, to w odpowiednio dobranej bazie macierz A operatora φ ma prostszą postać. Bierzemy dowolną bazę $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ przestrzeni U i uzupełniamy ją do bazy przestrzeni V . Z warunku $\varphi(c_i) \in U$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ wynika, że $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, gdzie $A_1 \in M_k(K)$, $A_2 \in M_{n-k}(K)$, $B \in M_{k \times (n-k)}(K)$, $0 \in M_{(n-k) \times k}$. Ponadto A_1 to macierz $\varphi|_U : U \rightarrow U$.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz $\varphi \in \text{End}(V)$.

Definicja 8.1.4. i) Liczbę $\lambda \in K$ nazywamy wartością własną endomorfizmu φ , jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in V$ taki, że $\varphi(v) = \lambda v$. Każdy taki wektor nazywamy wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ .

ii) Problem polegający na wyznaczeniu dla danego endomorfizmu φ wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych nazywamy zagadnieniem własnym dla endomorfizmu φ .

iii) Zbiór wszystkich wartości własnych operatora liniowego φ oznaczamy symbolem $\text{Spec}(\varphi)$ i nazywamy widmem bądź spektrum tego operatora.

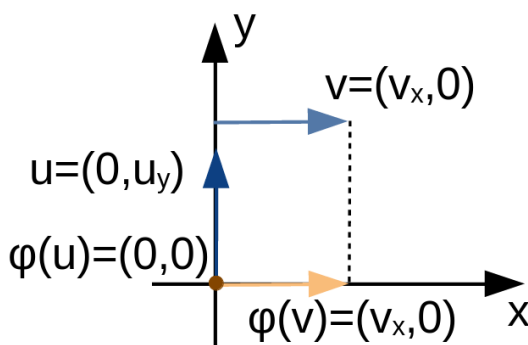
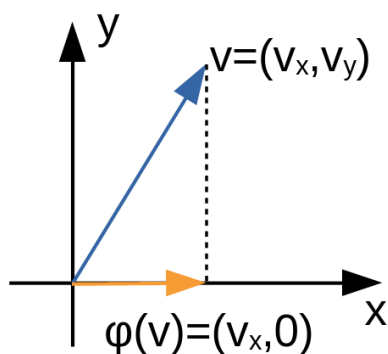
Uwaga 8.1.5. Każdy wektor własny odpowiada dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Przypuśćmy, że dla danego endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ istnieją $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$, $v \neq 0_V$ takie, że $\varphi(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$. Wówczas $0_V = \varphi(v) - \varphi(v) = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$. Ponieważ $v \neq 0_V$, zatem $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, czyli $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Przykład 8.1.6. Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$, będzie rzutem prostokątnym na oś Ox . Rozważ zagadnienie własne dla operatora φ . Zauważmy, że $\varphi(v) = \lambda v$, gdy $\varphi(v)$ ma ten sam kierunek co v , tj. $\varphi(v) \in \text{lin}(v)$. Zatem możliwe są dwie sytuacje:

- 1) $\lambda_1 = 1$, $\varphi(v) = v$, gdy $v \parallel Ox$, czyli $v = (v_x, 0)$
- 2) $\lambda_2 = 0$, $\varphi(v) = 0$, gdy $v \perp Ox$, czyli $v = (0, v_y)$

$$\varphi(v) = \lambda v$$

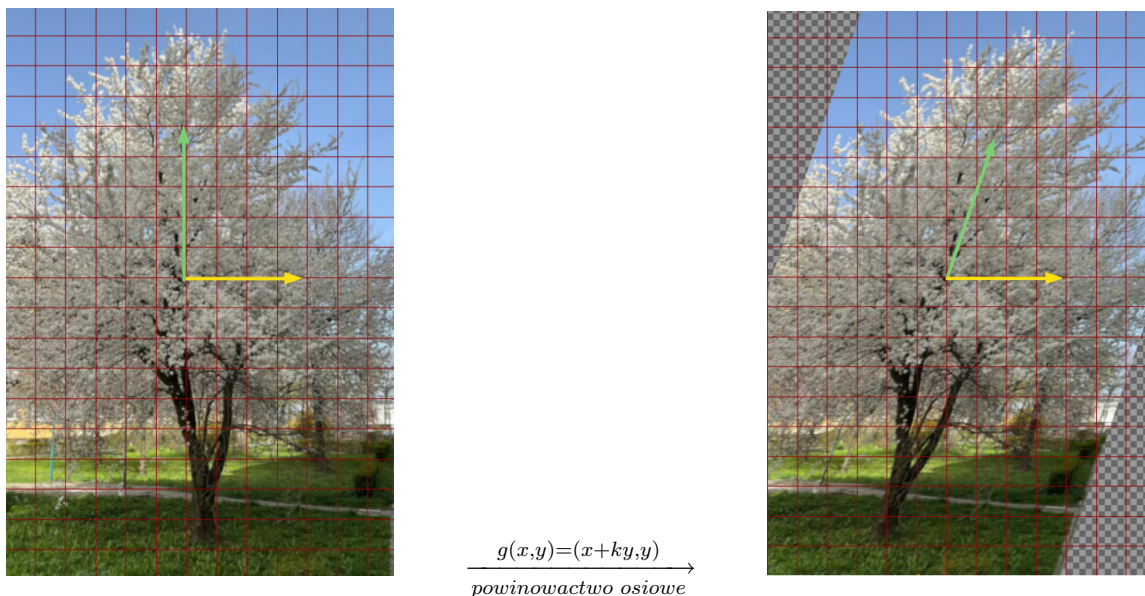


wektory
swobodne

$$\begin{aligned} \varphi(v_x, 0) &= (v_x, 0) \\ &= 1 \cdot (v_x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(0, u_y) &= (0, 0) \\ \lambda = 0 &= 0 \cdot (0, u_y) \end{aligned}$$

Przykład 8.1.7. Niech $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ to powinowactwo osiowe dane wzorem $g(x, y) = (x + ky, y)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ to ustalona stała.



W wyniku działania przekształcenia g zielony wektor zmienia kierunek, zaś żółty wektor nie zmienia kierunku. Żółty wektor jest zatem wektorem własnym $g \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$. Ponieważ długość żółtego wektora nie ulega zmianie, odpowiada on wartości własnej $\lambda = 1$.

Przykład 8.1.8. 1) Niech φ będzie endomorfizmem płaszczyzny danym wzorem $\varphi(\vec{v}) = 3\vec{v}$.
Dowolny wektor jest wektorem własnym φ odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 3$.

2) Niech φ będzie rotacją na płaszczyźnie (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) o kąt $\frac{\pi}{2}$. Zatem $\varphi(x, y) = (-y, x)$. Nie istnieją niezerowe wektory, które w wyniku rotacji zachowują swój kierunek. Brak zatem wektorów własnych dla φ .

3) Niech $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $\varphi = \frac{d}{dx}$, tzn. dla dowolnego $f \in V$ mamy $\varphi(f) = \frac{df}{dx} = f'$.
Przekonamy się, że dowolna liczba rzeczywista jest wartością własną operatora $\frac{d}{dx}$. Istotnie, niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Zdefiniujemy

$g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ gdzie $a \in \mathbb{R} \neq \{0\}$. Oczywiście $g_\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ponadto $\varphi(g_\lambda)(x) = a \cdot (e^{\lambda x})' = a\lambda e^{\lambda x} = \lambda(a \cdot e^{\lambda x}) = \lambda g_\lambda(x)$. Zatem g_λ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Stąd $\text{Spec}(\varphi) = \mathbb{R}$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \exists f \in V : \frac{df}{dx} = \lambda \cdot f$$

Wektory własne znajdują zastosowania na przykład w systemach rozpoznawania twarzy. Więcej informacji można znaleźć tutaj lub tutaj.

Cel: diagonalizacja macierzy endomorfizmu

Przy spełnieniu odpowiednich warunków, wyznaczmy taką bazę przestrzeni liniowej V , że macierz endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ w tej bazie będzie diagonalna.

Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ .

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ , uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

bo z założenia
wektor własny $\neq \vec{0}$

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

by mieć
podprzestrzeń
eigenvalues
eigenvectors

Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ -niezmienniczą.

iii) $E_\lambda = \text{Ker} \psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$.

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \lambda \cdot v = \lambda \cdot \text{id}(v) \\ \varphi(v) - \lambda \cdot \text{id}(v) &= 0\end{aligned}$$

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy podprzestrzenią własną endomorfizmu φ , odpowiadającą wartości własnej λ .

EIGENSPACE

$$(\varphi - \lambda \cdot \text{id})(v) = 0$$

Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in \text{End}(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in \text{End}(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i} , gdzie $\lambda_i \in \text{Spec}(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.12. Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in K$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V . Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$

ii) $\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{\mathbf{0}_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $\mathbf{0}_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V .

Definicja 8.1.15. Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V . Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy pierwiastkami charakterystycznymi odwzorowania φ .