

$$\varphi: V \rightarrow V$$

$$\text{WEKTOR WŁASNY} \quad \text{endom-}\varphi$$

$$\exists \lambda \in K \quad \varphi(v) = \lambda v$$

$$v \neq 0_V \quad \text{t.j.}$$

Taka baza nie zawsze istnieje. Będzie to baza złożona z wektorów własnych φ .

Na macierzach diagonalnych łatwo wykonywać działania mnożenia i potęgowania, co odpowiada składaniu i iterowaniu endomorfizmów.

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Oznaczmy przez E_λ zbiór wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ , uzupełniony o wektor zerowy. Zatem

bo z założenia wektor własny $\neq 0$

$$E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}$$

by mieć podprzestrzeń

eigenvalues
eigenvectors

Twierdzenie 8.1.9. i) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

ii) Zbiór E_λ jest podprzestrzenią φ -niezmienniczą.

$$\varphi(v) = \lambda v = \lambda (\text{id}(v))$$

$$\varphi(v) - \lambda \cdot \text{id}(v) = 0$$

iii) $E_\lambda = \text{Ker} \psi$, gdzie $\psi = \varphi - \lambda \cdot \text{id}_V$.

Definicja 8.1.10. Przestrzeń wektorową E_λ nazywamy podprzestrzenią własną endomorfizmu φ , odpowiadającą wartości własnej λ .

EIGENSPACE

$$(\varphi - \lambda \cdot \text{id})(v) = 0$$

Uwaga 8.1.11. Na mocy uwagi 8.1.5 otrzymujemy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_V\}$. Zatem zamiast badać endomorfizm $\varphi \in \text{End}(V)$, możemy badać jego restrykcje $\varphi|_{E_{\lambda_i}} \in \text{End}(E_{\lambda_i})$ na podprzestrzenie niezmiennicze E_{λ_i} , gdzie $\lambda_i \in \text{Spec}(\varphi)$.

Twierdzenie 8.1.12. Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in K$. Niech A będzie macierzą odwzorowania φ w dowolnej ustalonej bazie przestrzeni V . Wówczas następujące warunki są równoważne.

i) $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$

ii) $\text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{0_V\}$

iii) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\text{Spec}(\varphi) = ? \quad \exists \lambda \in \text{Spec}(\varphi)$$

$$\text{tzn.} \exists v \neq 0_V : \varphi(v) = \lambda v$$

Wniosek 8.1.13. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni V oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. Wówczas wektor $0_V \neq v \in V$, $v = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ , odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$(A - \lambda I)X = 0, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

układ jednorodny

→ Należy nie być sprzeczny

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Nie jest to równanie

→

jest

NIE OZNACZONY

Twierdzenie 8.1.14. Wartości własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nie zależą od wyboru bazy przestrzeni V .

Definicja 8.1.15. Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy wielomian $\chi_\varphi \in K[t]$ postaci $\chi_\varphi(t) = \det(A - tI)$, gdzie A jest reprezentacją macierzową odwzorowania φ w pewnej bazie przestrzeni V . Równanie $\chi_\varphi(t) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym tego endomorfizmu. Pierwiastki wielomianu χ_φ nazywamy pierwiastkami charakterystycznymi odwzorowania φ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - t \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 4-t \end{bmatrix}$$

102

χ 'chi'

równanie wielomianowe

Macierz A

możesz opisywać

w dowolnie wybranej bazie

inaczej wpisać to na rachunki

$$\det A = (1-t)(4-t) - 6$$

↑ wielomian emittujący t

Uwaga 8.1.16. i) Pierwiastki charakterystyczne wielomianu χ_φ należące do ciała K to wartości własne endomorfizmu φ .

ii) Na mocy twierdzenia 8.1.14 wielomian χ_φ nie zależy od wyboru bazy przestrzeni V .

iii) Jeśli $\dim V = n$, to wówczas $\deg \chi_\varphi = n$.

$$A \quad m \times m$$

Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 8.1.17. i) Wielomianem charakterystycznym macierzy A nazywamy wielomian $\chi_A \in K[t]$ postaci $\chi_A(t) = \det(A - tI)$. Równanie $\chi_A(t) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym macierzy A .

ii) Każdy pierwiastek wielomianu χ_A należący do ciała K nazywamy wartością własną macierzy A . Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy symbolem $\text{Spec}(A)$ i nazywamy widmem bądź spektrum tej macierzy.

iii) Każdy niezerowy wektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ spełniający równanie

$$AX = \lambda X, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

nazywamy wektorem własnym macierzy A , odpowiadającym wartości własnej λ .

Uwaga 8.1.18. Wartości i wektory własne endomorfizmu $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ (lub $\varphi \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$) są identyczne z wartościami i wektorami własnymi macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ (odpowiednio $A \in M_n(\mathbb{C})$), będącej reprezentacją macierzową odwzorowania φ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (odpowiednio $\mathbb{C}^n$).

Niech V będzie przestrzenią liniową n -wymiarową. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ oraz $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$.

pol. wielom.
||
równanie
alg.

Definicja 8.1.19. i) Krotność k_λ liczby λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego χ_φ nazywamy krotnością algebraiczną wartości własnej λ .

ii) Wymiar $\dim E_\lambda$ podprzestrzeni własnej E_λ nazywamy krotnością geometryczną wartości własnej λ .

iii) Wartości własne o krotności geometrycznej 1 nazywamy prostymi. Widmo składające się z n różnych (a zatem prostych) wartości własnych nazywamy widmem prostym.

Twierdzenie 8.1.20. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ oraz niech A będzie reprezentacją macierzową φ w pewnej bazie przestrzeni V . Wówczas

- ✓ i) $1 \leq \dim E_\lambda \leq k_\lambda$, krotność geom. nigdy nie przekracza krotności alg.
- ii) $\dim E_\lambda = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I)$.

||
2

$$\dim \text{Im}(\varphi - \lambda \text{Id})$$

103

$$E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id})$$

Tw. o rzędzie

Szkic dowodu. i) Jeśli $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$, to istnieje $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$ taki, że $v \in E_\lambda$, zatem $1 \leq \dim E_\lambda$.
 Rozumowanie uzasadniające, że $\dim E_\lambda \leq k_\lambda$ można znaleźć w [4].
 ii) Ponieważ $E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V)$, zatem
 $\dim E_\lambda = \dim V - \dim \text{Im}(\varphi - \lambda \cdot \text{id}_V) = \dim V - \text{rank}(A - \lambda I)$. $\square$

Przykład 8.1.21. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3), \quad \varphi(x, y, z) = (x + 2y, 2y, -2x - 2y - z).$$

Określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiary tychże podprzestrzeni.

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v \neq \mathbf{0}_V = (0, 0, 0)$$

t.z.c

$$\varphi(v) = \lambda v$$

$$\chi_A(t) = \chi_\varphi(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -2 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-1-t)$$

$$AX = \lambda X$$

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$$

$$\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1\}, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ widmo proste}$$

$$E_{\lambda_3} = E_{-1} = ?$$

$$(A - \lambda_3 I)X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0, z \in \mathbb{R}$$

METODA I:

Wektory własne odpowiadające $\lambda_3 = -1$ są postaci $v = (0, 0, z)$, gdzie $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$E_{-1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(0, 0, 1)\} \text{ oraz } \dim E_{-1} = 1$$

METODA II:

Alternatywnie, korzystając z twierdzenia 8.1.20 ii), możemy obliczyć

$$\dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

METODA III:

Tak naprawdę, wiemy to z góry, bowiem na mocy twierdzenia 8.1.20 i) mamy

$$1 \leq \dim E_{\lambda_3} \leq k_3 = 1, \text{ zatem } \dim E_{\lambda_3} = 1.$$

Analogicznie wyznaczamy E_{λ_1} oraz E_{λ_2} . Z góry wiemy, że $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

Twierdzenie 8.1.22. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \text{Spec}(A)$ oraz niech $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ . Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

i) $\lambda^k \in \text{Spec}(A^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym λ^k .

ii) $c \cdot \lambda \in \text{Spec}(c \cdot A)$ dla każdego $c \in K$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $c \cdot \lambda$.

iii) $p(\lambda) \in \text{Spec}(p(A))$ dla każdego wielomianu $p \in K[X]$, oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $p(\lambda)$.

iv) Jeśli A jest nieosobliwa oraz $\lambda \neq 0$, to $\frac{1}{\lambda} \in \text{Spec}(A^{-1})$ oraz v jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{\lambda}$.

v) $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(A^T)$

vi) A jest odwracalna $\Leftrightarrow 0 \notin \text{Spec}(A)$.

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \notin \text{Spec}(A)$$

Twierdzenie 8.1.23. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Wówczas

i) $\det(A) = \chi_A(0) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

$$\det(A - tI) = \chi_A(t)$$

ii) Jeśli $\lambda \in \text{Spec}(A)$, ale wielomian charakterystyczny χ_A macierzy A ma współczynniki rzeczywiste, to $\bar{\lambda} \in \text{Spec}(A)$. Ponadto wektor $w = (w_1, \dots, w_n) \in V$ taki, że $\bar{w}_i = v_i$ jest wektorem własnym odpowiadającym $\bar{\lambda}$.

iii) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

iv) $r(A)$ jest sumą krotności niezerowych wartości własnych.

8.2 Diagonalizacja

$$\dim V = n$$

Twierdzenie 8.2.1. Wektory własne operatora liniowego $\varphi \in \text{End}(V)$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.2.2. Niech V będzie rzeczywistą (zeszłą) przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$.

i) Jeśli φ ma widmo proste $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, to wektory własne $v_1, \dots, v_n$, gdzie v_i odpowiada λ_i , dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tworzą bazę przestrzeni V .

ii) Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n \in V$ endomorfizmu φ (nie necessarily odpowiadające różnym wartościom własnym) tworzą bazę przestrzeni V oraz $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to macierz przekształcenia φ w tej bazie ma postać diagonalną

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\varphi(v_3) = \lambda_3 \cdot v_3 = [0, 0, \lambda_3, 0, \dots, 0]_B$$

$v_1, \dots, v_n$ - wektory własne

$B = (v_1, \dots, v_n)$ baza V

$$\varphi(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1 = [\lambda_1, 0, \dots, 0] = \lambda_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

WAŻNE!

$$\dim V = n$$

iii) (Twierdzenie spektralne) Jeśli wielomian charakterystyczny χ_φ rozkłada się na czynniki liniowe

$$\chi_\varphi = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_p)^{k_p},$$

$$\deg \chi_\varphi = n$$

(tzn. $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i \neq j$ oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$) i ponadto $k_i = \dim E_{\lambda_i}$, dla $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, to wówczas istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ .

Definicja 8.2.3. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy diagonalizowalnym, gdy istnieje taka baza przestrzeni V , że macierz operatora φ w tej bazie jest macierzą diagonalną.

STONNIE

Wniosek 8.2.4. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ . Dokładniej mówiąc, $\varphi \in \text{End}(V)$, gdzie $\dim V = n$, jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele K (licząc z krotnościami) oraz dla każdej wartości własnej można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Przykład 8.2.5. Niech $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ oraz $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$M_2(\mathbb{C})$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \neq 0.$$

nad $K = \mathbb{R}$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $\text{Spec}(A) = \emptyset$ i nie istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych φ .

Uwaga 8.2.6. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że każdy operator liniowy na zespolonej przestrzeni liniowej ma wektor własny.

Macierz diagonalizująca

Definicja 8.2.7. Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1}BC$.

Twierdzenie 8.2.8 (o niezmiennikach macierzy podobnych). Jeżeli macierze A i B są podobne, to wówczas

i) $r(A) = r(B)$,

ii) $\det A = \det B$

iii) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

iv) $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B)$

$$\varphi: V \rightarrow V$$

$\mathcal{B}$ - baza V

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$$

$\mathcal{B}'$ - nowa baza V

$$A' = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$$

$$P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

← nieosobliwa ←

$$A' = Q^{-1} A P$$

$$Q = P$$

$$A' = P^{-1} A P$$

Jeżeli $\varphi \in \text{End}(V)$, to dla dowolnych baz $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni V macierze $M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ są podobne. Macierz ustanawiająca relację podobieństwa jest macierzą $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zmiany bazy przestrzeni V .

Definicja 8.2.9. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy diagonalizowalną, gdy jest podobna do macierzy diagonalnej, tzn. istnieje macierz nieosobliwa $P \in GL_n(K)$ taka, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna. Mówimy wówczas, że macierz P diagonalizuje macierz A .

Wniosek 8.2.10. Macierz $A \in M_n(K)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych A .

Z uwagi na związek między widmem endomorfizmu a widmem macierzy wszystkie twierdzenia udowodnione dla endomorfizmu są prawdziwe dla macierzy.

Uwaga 8.2.11. Niech V będzie przestrzenią liniową z bazą kanoniczną $\mathcal{B}$. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie diagonalizowalną oraz niech $\mathcal{B}'$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych φ . Oznaczmy $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_k)$, $D = M_\varphi(\mathcal{B}', \mathcal{B}')$ oraz $P = P_{\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}'}$. Wówczas $A = PDP^{-1}$.

$$AX = PDP^{-1}X$$

przejście od bazy wektorów własnych do bazy kanonicznej

przejście od bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych

macierz diagonalna
Każda współrzędna wektora $P^{-1}X$ jest mnożona przez stałą (będącą wartością własną).
Zmiana każdej współrzędnej zależy tylko od niej samej, a nie od innych współrzędnych.

nowa baza
złożona
z wektorów
własnych

A
" "
 D

diagonalna

Np

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x \\ 2 \cdot y \end{bmatrix}$$

$$D = A' = P^{-1}AP$$

$$PA' = AP$$

$$PAP^{-1} = A$$

Przykład 8.2.12. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \neq 0.$$

Wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków rzeczywistych, zatem $\text{Spec}(A) = \emptyset$ i macierz rzeczywista A nie jest diagonalizowalna.

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

brak pierwi. w $\mathbb{R}$

Przykład 8.2.13. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -3 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) + 3 = t^2 - 3t + 5.$$

Wielomian charakterystyczny to wielomian zespolony o współczynnikach rzeczywistych. Posiada zatem dwa sprzężone pierwiastki zespolone.

Mamy $\chi_A(t) = (t - \frac{3-\sqrt{11}i}{2})(t - \frac{3+\sqrt{11}i}{2})$. Macierz zespolona A jest diagonalizowalna.

$$\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$$

widmo proste 107

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Przykład 8.2.14. Czy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest diagonalizowalna?

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 \text{ oraz } \text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 1\}.$$

Ponadto $\lambda_1 = 1$ ma krotność algebraiczną $k_1 = 2$.

Wyznaczamy podprzestrzeń własną $E_{\lambda_1} = \{v = (x, y) \in \mathbb{C}^2 : (A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $E_{\lambda_1} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$ i krotność geometryczna $\dim E_{\lambda_1} = 1 \neq k_1 = 2$.

Macierz A nie jest diagonalizowalna.

Przykład 8.2.15. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ taki, że $\varphi(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$, $\varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$ jest diagonalizowalny?

Odczytujemy wartości własne i wektory własne

$\lambda_1 = -1, v_1 = (1, 1, 1), \lambda_2 = 1, v_2 = (0, 1, 1), \lambda_3 = 2, v_3 = (0, 0, 1).$

Widmo jest proste, a zatem na mocy twierdzenia 8.2.2 i), operator φ jest diagonalizowalny.

Przykład 8.2.16. Czy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem

$\varphi(x, y, z) = (3x + 8z, 3x - y + 6z, -2x - 5z)$ jest diagonalizowalny?

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 8 \\ 3 & -1-t & 6 \\ -2 & 0 & -5-t \end{vmatrix} = (-1-t)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3-t & 8 \\ -2 & -5-t \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+t)(1+2t+t^2) = -(1+t)^3$$

$$\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = -1\}, k_1 = 3$$

$$E_{\lambda_1} = E_{-1} = \{v = (x, y, z) : (A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$\dim E_{-1} = 3 - r(A + I) = 3 - r \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq k_1 = 3.$$

Endomorfizm φ nie jest diagonalizowalny, bowiem nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych φ .

Przykład 8.2.17. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu f i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy f jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu f w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P .

$$f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$f \in \text{End}(M_2(\mathbb{R})), \quad f(A) = A + A^T$$

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ baza } M_2(\mathbb{R})$$

$$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = M_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{bmatrix}$$

$\text{Spec}(f) = ?$

$$\chi_f(t) = \det(A - tI) = (2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)^2((1-t)^2 - 1) = (2-t)^2(t^2 - 2t) = -t(2-t)^3$$

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 3, \dim E_0 = 1, 1 \leq \dim E_2 \leq 3$$

$$E_{\lambda_1} = E_0 = \text{Ker}(f) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = O\}$$

$$\text{Niech } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$B + B^T = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ b + c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

$$a = d = 0 \\ b = -c$$

$$\text{Zatem } B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = E_2 = \text{Ker}(f - 2 \cdot \text{id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B + B^T = 2B\}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a, b, c, d]_{\mathcal{B}}, \quad O_{2 \times 2} = [0, 0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$$

$$f(B) = 2B$$

wektor w. odp. $\lambda = 0$

$$f(B) - 2 \cdot \text{id}(B) = O$$

$$(A - 2I)X = O$$

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b = c, \quad a, b, d \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

X-współrzędne
B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ są liniowo niezależne} \Rightarrow \dim E_2 = 3$$

$$\text{Baza wektorów własnych } \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\mathcal{B} \text{ A2A } M_2(\mathbb{R})$$

$$n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$D = M_\varphi(C, C)$ C odpow. $\lambda = 0$

$$D = P^{-1} A P$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 8.2.18. Rozważmy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (4x + 2y, y - x)$.

Możemy wyliczyć $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3\}$.

Widmo jest proste, zatem φ jest diagonalizowalny.

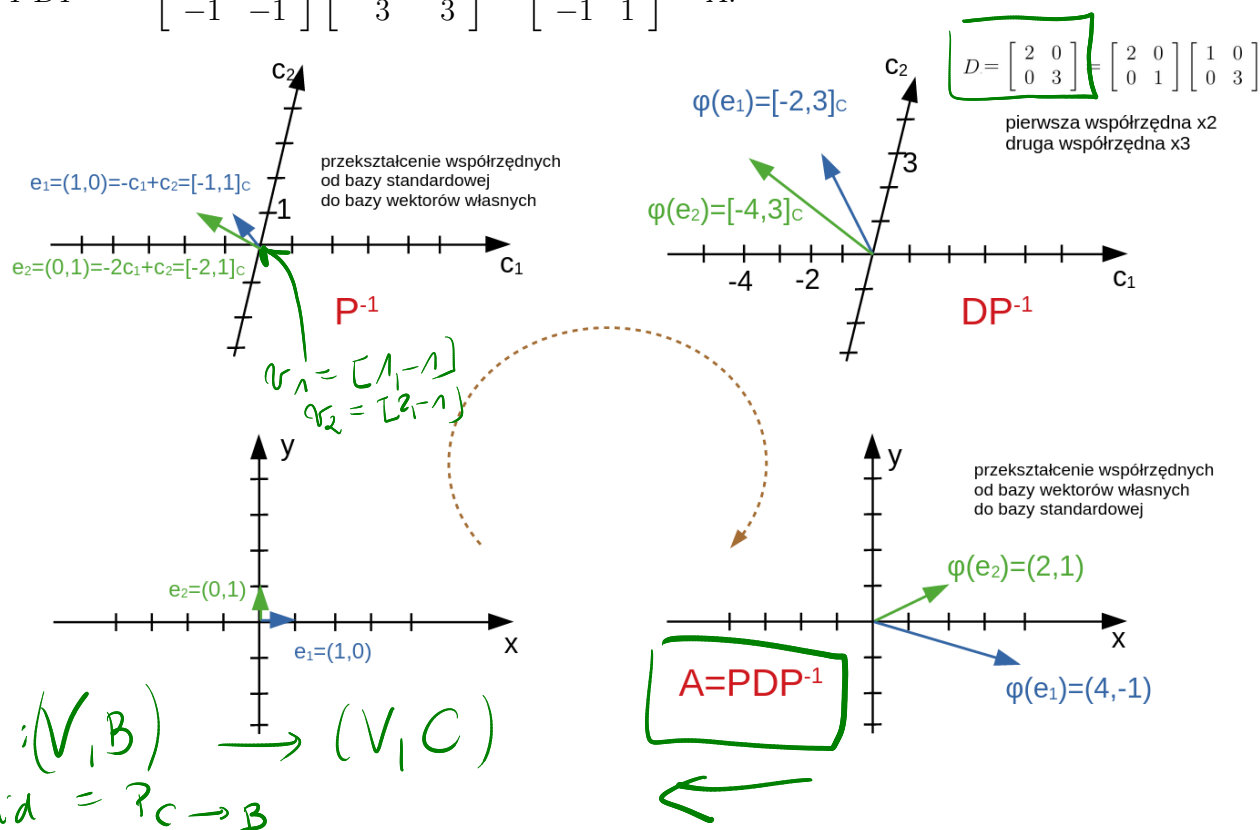
Układ $C = (v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -1))$ jest bazą wektorów własnych.

$$A = M_\varphi(B_k^2, B_k^2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = P_{B_k^2 \rightarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = M_\varphi(C, C) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obliczamy $P^{-1} = P_{C \rightarrow B_k^2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz

$$DP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$



Uwaga 8.2.19. W dalszej części wykładu przekonamy się, że każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k rzeczywistej macierzy symetrycznej odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych. A zatem rzeczywiste macierze symetryczne są zawsze diagonalizowalne. Co więcej, wśród wszystkich możliwych macierzy diagonalizujących daną rzeczywistą macierz symetryczną, znajdziemy zawsze taką macierz diagonalizującą P , dla której $P^{-1} = P^T$.