

8.3 Zastosowania diagonalizacji

Znajdowanie wartości złożenia endomorfizmu

Wniosek 8.3.1. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową n -wymiarową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie ustaloną bazą przestrzeni V . Jeśli wektory własne $v_1, \dots, v_n$ odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (niekoniecznie różnym), tworzą bazę $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni V , to wówczas dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$

$$M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = PD^r P^{-1}, \quad \text{gdzie } P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}, \quad D =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$$

$$D = P^{-1}AP$$

Dowód. Niech $A = M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $D = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ oraz $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$. Wówczas $A^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ oraz $D^r = M_{\varphi^r}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. Ponadto $D = P^{-1}AP$, skąd $A = PDP^{-1}$ oraz $A^r = (PDP^{-1})^r = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{r\text{-razy}} = PD(P^{-1}P)D \dots (PP^{-1})DP^{-1} = PD^r P^{-1}$. $\square$

Przykład 8.3.2. Wyznacz wszystkie wartości własne endomorfizmu φ i określ ich krotności algebraiczne. Wyznacz odpowiadające im wektory własne, podprzestrzenie własne i wymiar tychże podprzestrzeni. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, podaj bazę wektorów własnych, macierz D endomorfizmu φ w tejże bazie oraz macierz diagonalizującą P . Oblicz $\varphi^{101}(1, 2, 3)$.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 2x + 2z, y + z - x)$$

$$A = M_{\varphi}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 1 & 2-t \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 2-t & 0 \\ 0 & 2-t & 6-3t \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (4-t)(2-t)^2 - 3(2-t)^2 = (2-t)^2(1-t)$$

$$\text{Spec } \varphi = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2\}, \quad k_1 = 1, k_2 = 2, \quad \dim E_1 = 1, \quad 1 \leq \dim E_2 \leq 2$$

φ będzie diagonalizowalny, jeśli $\dim E_2 = 2 = k_2$.

$$\dim E_2 = 3 - r(A - 2I) = 3 - r \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

zatem φ jest diagonalizowalny.

Wyznamy bazę złożoną z wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = 1$.

$$(A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 \subseteq \text{Ker}(\varphi - 2\text{id})$$

$$\dim \text{Im}(\varphi - 2\text{id}) = r(A - 2I)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2z, z \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \{(-2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(-2, -2, 1)\}$$

Rozważmy $\lambda_2 = 2$.

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + y - z = 0 \Rightarrow z = y - x, x, y \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \{(x, y, y - x) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$$

Baza wektorów własnych $\mathcal{C} = (c_1 = (-2, -2, 1), c_2 = (1, 0, -1), c_3 = (0, 1, 1))$

$$D = M_{\varphi}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ macierz diagonalizująca } P := P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczymy $\varphi^{101}(1, 2, 3)$ na dwa różne sposoby.

METODA I: Wykorzystamy macierz D . Niech $v := (1, 2, 3)_c = [a, b, c]_c$.

$$\text{Wówczas } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ skąd } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Obliczamy } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } v = [2, 5, 6]_c.$$

$$D^{101} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \cdot 2^{101} \\ 6 \cdot 2^{101} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{101}(v) = [2, 5 \cdot 2^{101}, 6 \cdot 2^{101}]_c = 2c_1 + 5 \cdot 2^{101}c_2 + 6 \cdot 2^{101}c_3 = (-4 + 5 \cdot 2^{101}, -4 - 6 \cdot 2^{101}, 2 + 2^{101})$$

METODA II: Obliczamy

$$\begin{aligned} A^{101} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= P D^{101} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{101} - 2 & 2 - 2^{102} & 2^{102} - 2 \\ 2^{102} - 2 & 2 - 2^{101} & 2^{102} - 2 \\ 1 - 2^{101} & -1 + 2^{101} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 5 \cdot 2^{101} \\ -4 - 6 \cdot 2^{101} \\ 2 + 2^{101} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Relacje rekurencyjne

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 8.3.3. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zdefiniowanym następująco

i) $a_1 = r_1, a_2 = r_2, \dots, a_k = r_k$, gdzie $r_1, r_2, \dots, r_k \in K, k \geq 1$.

ii) $a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_k a_{n-k}$, gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k \in K, p_k \neq 0, n \geq k+1$.

Równanie ii) nazywamy jednorodną liniową relacją rekurencyjną rzędu k , zaś równania i) nazywamy warunkami początkowymi rekurencji.

Niech $X_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}]^T$. Wówczas powyższy układ równań można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{bmatrix},$$

$X_n = A_k X_{n-1}$

czyli $X_n = A_k X_{n-1}$, dla $n \geq k+1$.

Zauważmy, że $X_n = A_k X_{n-1} = A_k^2 X_{n-2} = A_k^3 X_{n-3} = \dots = A_k^{n-k} X_k$, czyli

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-k} \begin{bmatrix} r_k \\ r_{k-1} \\ r_{k-2} \\ \vdots \\ r_1 \end{bmatrix}$$

Zadanie wyraz początkowe

OBSERWACJA: Aby znaleźć wzór ogólny a_n , należy wyznaczyć potęgę macierzy A_k .

Jeśli A_k jest diagonalizowalna, możemy wykorzystać metodę z poprzedniego przykładu.

Przykład 8.3.4. Znajdziemy n -ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie $a_1 = 0, a_2 = 8, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

$$\text{Otrzymujemy układ } \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Diagonalizujemy macierz } A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Obliczamy } \det(A_2 - tI) = \begin{vmatrix} 2-t & 3 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1).$$

$\text{Spec}(A_2) = \{-1, 3\}$ widmo proste, macierz diagonalizowalna

Wybieramy bazę wektorów własnych. Rozważmy $\lambda_1 = -1$.

$$(A_2 + I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 = (-1, 1)$$

Rozważmy $\lambda_2 = 3$.

$$(A_2 - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = (3, 1)$$

$$D = P^{-1} A_2 P$$

r_1 r_2

$$A_2 = P D P^{-1} \quad A_2^{n-2} = P D^{n-2} P^{-1}$$

Macierz diagonalizująca to $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Stąd

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1} \\ 2 \cdot (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

Zatem $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^{n-1}$.

Twierdzenie 8.3.5. Przyjmijmy oznaczenia jak powyżej. Rozważmy jednorodną liniową relację rekurencyjną rzędu k postaci $-a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_k a_{n-k} = 0$.

- i) Wielomian charakterystyczny χ_{A_k} macierzy A_k jest wielomianem postaci $\chi_{A_k}(t) = -t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + \dots + p_k t^{n-k}$.
- ii) Jeśli widmo macierzy A_k jest proste, tj. $\text{Spec}(A_k) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, gdzie $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$, wówczas $v_j = (\lambda_j^{k-1}, \lambda_j^{k-2}, \dots, \lambda_j^2, \lambda_j, 1)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_j , dla $j = 1, 2, \dots, k$.

Uwaga 8.3.6. Przyjmijmy oznaczenia jak powyżej. Wówczas $A = P D P^{-1}$, gdzie

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad P = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 8.3.7. Niech $x_0, x_1, \dots, x_n \in K$. Macierz kwadratową stopnia $n+1$ postaci

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \quad \text{nazywamy macierzą Vandermonde'a.}$$

Wyznacznik tej macierzy nazywany jest macierzy Vandermonde'a. Jest on wielomianem postaci $\det V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

W rozważanym przypadku $\det P = \pm \det V(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, bowiem $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$.

8.4 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie 8.4.1 (Cayleya-Hamiltona). Każda macierz kwadratowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Przykład 8.4.2. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wiemy, że $\chi_A(t) = t^2 - 2t - 3$.

Na mocy powyższego twierdzenia $A^2 - 2A - 3I = \mathbf{0}$. Sprawdzimy to rachunkiem.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} !$$

Wniosek 8.4.3. Niech $A \in M_n(K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Niech $\chi_A(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A .

i) Jeśli A jest odwracalna, to wówczas

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(c_n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \dots + c_2 A + c_1 I)$$

ii) $A^n = -\frac{1}{c_n}(c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I)$

iii) Dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia n można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$.

$$c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I = \mathbf{0}$$

$$c_0 I = -c_n A - c_{n-1} A^2 - \dots - c_1 A^{n-1} \quad \text{/: } A^{-1}$$

$$c_0 A^{-1} = -c_n - c_{n-1} A - \dots - c_1 A^{n-2} \quad \text{/: } c_n$$

Przykład 8.4.4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczmy macierz odwrotną A^{-1} .

$\det A = -5 \neq 0$ macierz jest odwracalna

$$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 \Rightarrow A^2 - 4A - 5I = \mathbf{0} \quad \text{Tw. C-H}$$

$$A^{-1}(A^2 - 4A - 5I) = A - 4I - 5A^{-1} = \mathbf{0} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I) = \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Przykład 8.4.5. Dana jest macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczmy B^9 .

$$\text{Obliczamy } \chi_B(t) = \det(B - tI) = \begin{vmatrix} -t & 2 & 6 \\ 2 & -8-t & -26 \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 + w_3} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & -18-t \\ -2 & 2 & 8-t \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{k_3 - 3k_2} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & -18-t \\ -2 & 2 & 2-t \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_1} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -2+t \\ 0 & -6-t & -18-t \\ -t & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)(6+t)t - 4t(2-t) = -t^3 + 4t.$$

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona $B^3 = 4B$, skąd

$$B^9 = 4^3 B^3 = 4^4 B = 256 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -8 & -26 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

$(B^3)^3 = 4^3 B$

Przykład 8.4.6. Dana jest macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, wyznaczmy $C^5 + C^3$ oraz C^{50} .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(C - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$1 - 2t + t^2$$

$$I - 2C + C^2 = \mathbf{0}$$

Oznaczmy $p(t) = t^5 + t^3$. Obliczamy $\chi_C(t) = (1-t)^2$. Dzielimy wielomian p przez wielomian χ_C (na ogół z resztą). Zatem istnieją wielomiany q_1, r_1 takie że $p(t) = q_1(t)\chi_C(t) + r_1(t)$ oraz $\deg(r_1) < \deg(\chi_C)$. Wykonując dzielenie, otrzymujemy $q_1(t) = t^3 + 2t^2 + 4t + 6, r_1(t) = 8t - 6$.

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona

$$p(C) = \chi_C(C)q_1(C) + r_1(C) = r_1(C) = 8C - 6I = 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy $w(t) = t^{50}$. Istnieją wielomiany q_2, r_2 takie że $w(t) = q_2(t)\chi_C(t) + r_2(t)$ oraz $\deg(r_2) < \deg(\chi_C) = 2$. Oznaczmy $r_2(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}$. Różniczkując obustronnie otrzymujemy $w'(t) = q_2'(t)\chi_C(t) + q_2(t)\chi_C'(t) + r_2'(t)$. Do układu równań

$$\begin{cases} t^{50} = q_2(t)(1-t)^2 + at + b \\ 50t^{49} = q_2'(t)(1-t)^2 - 2q_2(t)(1-t) + a \end{cases} \quad \text{podstawiamy } t = 1.$$

Stąd $\begin{cases} 1 = a + b \\ 50 = a \end{cases}$. Zatem $r_2(t) = 50t - 49$ oraz $C^{50} = 50C - 49I = \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

TEMAT: Przestrzenie euklidesowe

9.1 Iloczyn skalarny i norma

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.1. Funkcję $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy iloczynem skalarnym lub iloczynem wewnętrznym, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

- i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w)$, *liniowość na 1-szej zmiennej*
- ii) $\forall u, v \in V \quad s(u, v) = s(v, u)$, *symetria*
- iii) $\forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V$. *u IR*

Parę (V, s) nazywamy wówczas przestrzenią euklidesową. Bywa ona oznaczana symbolem E . Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $u \circ v$ lub $\langle u, v \rangle$. *(u, v) (u/v) <u,v> (u/v)*

Uwaga 9.1.2. Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni V , oraz $u, v \in V$, $u = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$, $v =$

$[y_1, y_2, \dots, y_n]_{\mathcal{B}}$, to każdy iloczyn skalarny jest postaci $s(u, v) = X^T A Y$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ oraz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $a_{ij} = s(b_i, b_j)$.

Warunki i) oraz ii) równoważne są stwierdzeniu, że $s(u, v)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 postaci $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, zaś macierz A jest macierzą symetryczną.

Warunek iii) w powyższej definicji równoważny jest stwierdzeniu, że macierz A jest dodatnio określona, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące główne macierzy A są dodatnie, lub równoważnie, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie.

Minorem wiodącym głównym stopnia k macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie $n - k$ ostatnich wierszy i kolumn. Oznaczamy go symbolem Δ_k .

Przykład 9.1.3. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) Standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy $\circ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że
 $\forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad u \circ v = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
 Przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \circ)$ oznaczamy symbolem $\mathbb{E}^n$.

2) $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in V \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Całka oznaczona ma własność liniowości. Ponadto $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, bowiem $f^2(x) \geq 0$ i całka oznaczona zachowuje nierówność słabą.

3) $V = \mathbb{R}_n[x], \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R},$

$\forall p, q \in V \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(x_i)q(x_i)$, gdzie $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ liczby ustalone

Rozważmy $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wówczas
 $\langle p, p \rangle = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0$.

Jeśli $\langle p, p \rangle = 0$, to oczywiście $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$. Wielomian stopnia co najwyżej drugiego, posiadający trzy różne pierwiastki jest wielomianem zerowym.

4) $V = M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$

$\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$

Na mocy twierdzenia 3.1.14, mówiącego o własnościach śladu macierzy, można wywnioskować, że jest to iloczyn skalarny.

Twierdzenie 9.1.4. Niech (V, s) będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

i) $\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w),$

ii) $\forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0,$

iii) $\forall u, v \in V \quad \left(s(u, v) \right)^2 \leq s(u, u) \cdot s(v, v)$ nierówność Schwarza

Niech $V = (V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Definicja 9.1.5. Funkcję $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli spełnia ona następujące warunki:

i) $\forall v \in V \quad \|v\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V,$

ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|,$

iii) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$ tzw. warunek trójkąta

Liczbę $\|v\| \geq 0$ nazywamy normą (lub długością) wektora v . Parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie 9.1.6. Jeśli (V, s) jest przestrzenią euklidesową, to odwzorowanie $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\forall v \in V \quad \|v\|_s = \sqrt{s(v, v)} \quad \text{pierwiastek z iloczynu skalarnego}$$

jest normą w przestrzeni V . Mówimy, że jest to *norma określona przez iloczyn skalarny*.

Wniosek 9.1.7. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną.

Przykład 9.1.8. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^n$, tj. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mamy $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Jest to tzw. *norma euklidesowa* w $\mathbb{R}^n$.

Przykład 9.1.9. Uzasadnimy, że odwzorowanie $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $s(x, y) = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$ dla $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Ponadto obliczymy normę wektora $v = (-1, 3)$.

METODA I : Sprawdzimy warunki z definicji iloczynu skalarnego.

Dla dowolnych $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

liniowości na 1-szą zmienną

$$\begin{aligned} s(\alpha x + \beta z, y) &= 13(\alpha x_1 + \beta z_1)y_1 - 2(\alpha x_1 + \beta z_1)y_2 - 2(\alpha x_2 + \beta z_2)y_1 + (\alpha x_2 + \beta z_2)y_2 = \\ &= \alpha(13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2) + \beta(13z_1y_1 - 2z_1y_2 - 2z_2y_1 + z_2y_2) = \alpha s(x, y) + \beta s(z, y) = P \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie s jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną. Ponadto $s(x, y) = s(y, x)$ oraz

$$s(x, x) = 13x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 9x_1^2 + (4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2) = 9x_1^2 + (2x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

Stąd $s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

METODA II : Skorzystamy z uwagi 9.1.2.

$s(x, y) = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2 postaci $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$. Rozważmy bazę $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$. Macierz $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = s(e_i, e_j)$ dla $i, j = 1, 2$ ma postać $A = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Łatwo zauważyć, że $A^T = A$. Ponadto $\Delta_1 = 13 > 0$ oraz $\Delta_2 = \det A = 9 > 0$. Zatem A jest symetryczna i dodatnio określona. Stąd wnioskujemy, że s jest iloczynem skalarnym.

Obliczymy normę wektora $v = (-1, 3)$.

$$\begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = 13 \quad \Delta_2 = 9 \quad \|v\| = \sqrt{s(v, v)} = \sqrt{13(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 13x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$$

9.2 Układy ortogonalne

Jeśli nie wyszczególniono inaczej, zawsze w danej przestrzeni euklidesowej rozpatrujemy normę pochodzącą od ustalonego iloczynu skalarnego.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wektor $v \in V$, którego długość jest równa 1 nazywamy unormowanym lub wersorem. Każdy wektor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ można unormować, tj. znaleźć wersor $\hat{v}$ o tym samym zwrocie i kierunku co v .

Istotnie $\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}$ jest wersorem, bowiem $\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$.

Miara kąta między wektorami

W przestrzeni euklidesowej można wprowadzić pojęcie kąta między niezerowymi wektorami. Na mocy nierówności Schwarza dla dowolnych $u, v \in V$ mamy

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Jeśli $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$, możemy widzieć $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ jako cosinus jednoznacznie określonego kąta $\alpha \in [0, \pi]$. Definiujemy kąt między wektorami u i v jako α . Utożsamiamy tutaj kąt z jego miarą. Zatem

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Przyjmujemy, że kąt pomiędzy wektorem zerowym $\mathbf{0}_V$ a innym wektorem jest nieokreślony.

Przykład 9.2.1. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}_1[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Wyznamy miarę kąta pomiędzy wektorami $u(x) = 2, v(x) = 5 - x$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u(0)v(0) + u(1)v(1) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \\ \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{[u(0)]^2 + [u(1)]^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ \|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{[v(0)]^2 + [v(1)]^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \angle(u, v) &= \arccos \frac{18}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} \end{aligned}$$

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos(\angle(u, v))$$

Definicja 9.2.2. i) Dwa wektory u, v nazywamy ortogonalnymi, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$.

ii) Układ wektorów $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nazywamy układem ortogonalnym, jeżeli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

ii) Układ wektorów nazywamy układem ortonormalnym, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}.$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$$

Uwaga 9.2.3. Wektor zerowy $\mathbf{0}_V$ jest ortogonalny do każdego wektora.

Przykład 9.2.4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathcal{C}([- \pi, \pi], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sprawdźmy, czy wektory $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ są ortogonalne/ortonormalne.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4} (-1 - (-1)) = 0 \quad \checkmark \Rightarrow f \perp g \\ \langle f, f \rangle &= \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Wektory są ortogonalne, ale nie ortonormalne.

f to nie wersor

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f$$

Twierdzenie 9.2.5 (Pitagorasa). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Dowód. $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \stackrel{\langle u, v \rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \square$

Twierdzenie 9.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 9.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 9.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną* (*ortonormalną*) tej przestrzeni.

Przykład 9.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$

baza ortogonalna $\mathcal{B}_k^3 = (\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1))$

Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{i}, v_y = v \circ \hat{j}, v_z = v \circ \hat{k}$.

Z dokładnością do znaku składowe v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 9.2.10. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Niech $v \in V, v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}.$$

Wniosek 9.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$