

Twierdzenie 9.2.5 (Pitagorasa). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas

$$\forall u, v \in V \quad u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Dowód. $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \stackrel{\langle u, v \rangle = 0}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \square$

Twierdzenie 9.2.6. Układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego jest liniowo niezależny.

Wniosek 9.2.7. i) Układ ortonormalny jest liniowo niezależny.

ii) W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ ortonormalny (lub układ ortogonalny nie zawierający wektora zerowego) nie może zawierać więcej niż n wektorów.

Definicja 9.2.8. Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest układem ortogonalnym (ortonormalnym), nazywamy *bazą ortogonalną* (ortonormalną) tej przestrzeni.

Przykład 9.2.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym bazą ortogonalną jest baza kanoniczna $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Współrzędne wektora w bazie ortogonalnej

MOTYWACJA: Przestrzeń $\mathbb{E}^3$

baza ortogonalna $\mathcal{B}_k = (\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1))$

Dla dowolnego wektora $v = (v_x, v_y, v_z)$ mamy $v_x = v \circ \hat{i}, v_y = v \circ \hat{j}, v_z = v \circ \hat{k}$.

Z dokładnością do znaku składowe v_x, v_y, v_z to długości rzutów ortogonalnych wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio, zaś wektory $v_x \cdot \hat{i}, v_y \cdot \hat{j}, v_z \cdot \hat{k}$, to rzuty ortogonalne wektora v na osie Ox, Oy, Oz odpowiednio.

Twierdzenie 9.2.10. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Niech $v \in V, v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}.$$

Ponadto

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \frac{\langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} + \frac{\langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} + \dots + \frac{\langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle}{\|b_n\|^2}.$$

Wniosek 9.2.11. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz $V \ni v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \alpha_i = \langle v, b_i \rangle$$

oraz

$$\forall u, w \in V \quad \langle u, w \rangle = \langle u, b_1 \rangle \langle w, b_1 \rangle + \langle u, b_2 \rangle \langle w, b_2 \rangle + \dots + \langle u, b_n \rangle \langle w, b_n \rangle.$$

Dowód. Wystarczy w twierdzeniu 9.2.10 przyjąć $\|b_i\| = 1$. $\square$

Wniosek 9.2.12. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oraz niech $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$. Wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j \rangle$ równa się $\sum_i \alpha_i \beta_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$. $\square$

$\sum_i \alpha_i \beta_i \cdot 1$
 $i \neq j \Rightarrow \langle b_i, b_j \rangle = 0$

Dopełnienie ortogonalne

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, zaś $S \subset V$ dowolnym podzbiorem.

Definicja 9.2.13. Zbiór $S^\perp := \{v \in V : \forall x \in S \langle v, x \rangle = 0\}$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym zbioru S* w przestrzeni euklidesowej V . Jeżeli zbiór S jest jednoelementowy tj. $S = \{x\}$, to zbiór $S^\perp$ nazywamy *dopełnieniem ortogonalnym wektora $x \in V$* .

Twierdzenie 9.2.14. Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

$S^\perp$ zbiór wektorów
1-elementowy

i) Jeśli $U \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , to wówczas $U^\perp$ również jest podprzestrzenią liniową.

wektorów $\perp x$

ii) Dla dowolnego wektora $u \in V$ zbiór $\{u\}^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 9.2.15. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wyznaczmy wszystkie wektory v ortogonalne do $u = (1, 0, 1, 0)$.

$0 = (1, 0, 1, 0) \cdot (x, y, z, t)$ $\{u\}^\perp = \{w \in \mathbb{R}^4 : w \perp u\} = ?$

Niech $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Wówczas $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$. Zatem $v = (x, y, -x, t)$ oraz $\{u\}^\perp = \{(x, y, -x, t) : x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Definicja 9.2.16. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jeśli $w \in U^\perp$, to mówimy, że wektor w jest *ortogonalny do podprzestrzeni U* i piszemy $w \perp U$.

Uwaga 9.2.17. Niech U będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V , zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ bazą tej podprzestrzeni. Wówczas dla dowolnego wektora $w \in V$

$$w \perp U \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad w \perp b_i$$

Dowód. Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. Ponadto jeśli dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $\langle w, b_i \rangle = 0$, to wówczas dla dowolnego $u \in U$, $u = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$ mamy $\langle w, u \rangle = \alpha_1 \langle w, b_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle w, b_n \rangle = 0$. Zatem $w \perp U$. $\square$

Przykład 9.2.18. Rozważmy $V = \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, podprzestrzeń $U = \mathbb{R}_1[x]$ oraz $w = 6x^2 - 6x + 1$. Czy $w \perp U$?

$$w \perp U = \mathbb{R}_1[x] = \text{lin}\{1, x\} \Leftrightarrow w \perp 1 \wedge w \perp x$$

$$\langle w, 1 \rangle = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)dx = 2x^3 - 3x^2 + x \Big|_0^1 = 0$$

$$\langle w, x \rangle = \int_0^1 (6x^3 - 6x^2 + x)dx = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = 0 \quad \text{Zatem } w \perp U.$$

Własności dopełnienia ortogonalnego

Twierdzenie 9.2.19. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U, U_1, U_2 jej podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas:

- i) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$,
- ii) $U^\perp = (\text{lin} U)^\perp$,
- iii) $U \subset (U^\perp)^\perp$.
- iv) Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas $U = (U^\perp)^\perp$.²¹

9.3 Metody ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.1. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\{b_1, \dots, b_m\} \subset V$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Wówczas istnieje układ ortogonalny $\{c_1, \dots, c_m\} \subset V$ taki, że $\text{lin}\{b_1, \dots, b_m\} = \text{lin}\{c_1, \dots, c_m\}$.

Wniosek 9.3.2. i) Każda skończona wymiarowa przestrzeń euklidesowa różna od $\{0\}$ ma bazę ortogonalną i ortonormalną.

ii) W przestrzeni euklidesowej skończonej wymiarowej każdy układ ortonormalny można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Wniosek 9.3.3. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, to wówczas ciąg wektorów $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, zdefiniowany poniżej, jest bazą ortogonalną tej przestrzeni.

$$c_1 := b_1 \quad c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 \quad c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 \quad \dots \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\|c_i\|^2} c_i$$

Przykład 9.3.4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Dokonamy ortogonalizacji bazy $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

Niech $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$. Zauważmy, że baza $\mathcal{B}$ nie jest ortogonalna, bowiem $b_1 \circ b_3 = 1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 2 \neq 0$.

²¹ Jeśli U jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, to równość na ogół nie zachodzi. Przykładem może być podprzestrzeń U przestrzeni $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, postaci $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$. Można uzasadnić, że $U^\perp = \{0\}$ i w konsekwencji $U \neq (U^\perp)^\perp = V$.

$$C_1 = b_1 = 1$$

$$b_2 = x \\ c_2 = ?$$

Niech $C = (c_1, c_2, c_3)$ oznacza poszukiwaną bazę ortogonalną.

I KROK: Niech $c_1 := b_1 = 1$.

II KROK: Poszukujemy $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $c_2 \circ c_1 = 0$.

Obliczamy $0 = c_2 \circ c_1 = (b_2 + \alpha c_1) \circ c_1 = b_2 \circ c_1 + \alpha \cdot (c_1 \circ c_1) = (-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \alpha(1 + 1 + 1) = 3\alpha$. Skąd $\alpha = 0$. Zatem $c_2 = b_2 = x$. (Mogliśmy to zauważyć wcześniej.)

III KROK: Poszukujemy c_3 w postaci $c_3 = b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Dobierzmy (β_1, β_2) tak, by $c_3 \circ c_1 = 0$ oraz $c_3 \circ c_2 = 0$.

Mamy $0 = c_3 \circ c_1 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_1 = b_3 \circ c_1 + \beta_1 (c_1 \circ c_1) + \beta_2 (c_2 \circ c_1) = b_3 \circ c_1 + \beta_1 \|c_1\|^2 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \beta_1 \cdot 3$, skąd $\beta_1 = -\frac{2}{3}$.

Analogicznie $0 = c_3 \circ c_2 = (b_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \circ c_2 = b_3 \circ c_2 + \beta_1 (c_1 \circ c_2) + \beta_2 (c_2 \circ c_2) = b_3 \circ c_2 + \beta_2 \|c_2\|^2 = (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + \beta_2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) = 2\beta_2$, skąd $\beta_2 = 0$.

Zatem $c_3 = b_3 - \frac{2}{3}c_1 = x^2 - \frac{2}{3}$.

$C = (c_1 = 1, c_2 = x, c_3 = x^2 - \frac{2}{3})$ jest bazą ortogonalną.

$$\|c_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \|c_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bazą ortonormalną jest układ wektorów

$$C' = (c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}).$$

Przykład 9.3.5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym

$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ oraz dwie bazy tej przestrzeni $B = (1, x, x^2)$ oraz

$$C' = (c'_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, c'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x, c'_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(x^2 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}).$$

Dany jest wektor $p = \sqrt{6}x^2 + 3\sqrt{2}x$. Obliczymy jego normę.

$\|p\|^2 = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 = (\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + 3\sqrt{2})^2 = 12 + 36 = 48$. Zauważmy, że $p = [2\sqrt{2}, 6, 2]_{C'}$ oraz $p = [0, 3\sqrt{2}, \sqrt{6}]_B$.

Baza C' jest bazą ortonormalną, zatem $\|p\|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 + 2^2 = 48$.

Baza B nie jest bazą ortonormalną, dlatego też $\|p\|^2 \neq (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = 24$.

Macierzowa metoda ortogonalizacji

Twierdzenie 9.3.6. Niech $u_1, \dots, u_m$ będą wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni $\mathbb{E}^n$.

Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są współrzędne wektorów $u_1, \dots, u_m$ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas stosując operacje elementarne na wierszach (bez zmiany kolejności!) macierzy blokowej $[AA^T | A]$, można doprowadzić ją do postaci $[G | A']$, gdzie $G \in M_m(\mathbb{R})$ jest macierzą trójkątną górną. Wektory wierszowe tak otrzymanej macierzy $A' \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne w $\mathbb{E}^n$.

Przykład 9.3.7. Stosując metodę macierzową, zortogonalizujemy układ wektorów $b_1 = (1, -2, 0)$, $b_2 = (5, 5, 1)$, $b_3 = (5, 4, 4)$ w przestrzeni $\mathbb{E}^3$.

$$[AA^T | A] \rightarrow [G | A']$$

124

$$A_{m \times n} \quad A^T_{m \times n} \\ A \cdot A^T_{m \times m} \quad \text{zawsze kwadratowa}$$

Układ ten jest liniowo niezależny, bowiem $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$.

Układ ten nie jest ortogonalny, bowiem $b_1 \circ b_2 = 5 - 10 + 0 = -5 \neq 0$.

A

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 51 & 49 \\ -3 & 49 & 57 \end{bmatrix}$$

$$[A \cdot A^T | A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 51 & 49 & 5 & 5 & 1 \\ -3 & 49 & 57 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 + \frac{3}{5}w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 46 & \frac{276}{5} & \frac{28}{5} & \frac{14}{5} & 4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -5 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 46 & 46 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{46}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 3 \end{array} \right]$$

Układ ortogonalny $c_1 = (1, -2, 0)$, $c_2 = (6, 3, 1)$, $c_3 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 3)$.

Jeśli nie używaliśmy operacji $\alpha \cdot w_i$, to na przekątnej macierzy G otrzymujemy $\|c_1\|^2, \|c_2\|^2, \|c_3\|^2$.

Zatem $\|c_1\| = \sqrt{5}, \|c_2\| = \sqrt{46}, \|c_3\| = \sqrt{\frac{46}{5}}$.

bez zmiany kolejności
wierszy

9.4 Rzut ortogonalny na podprzestrzeń

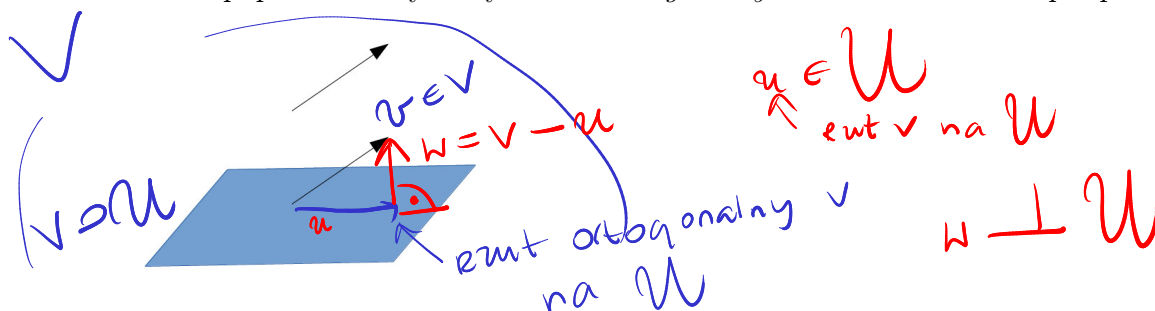
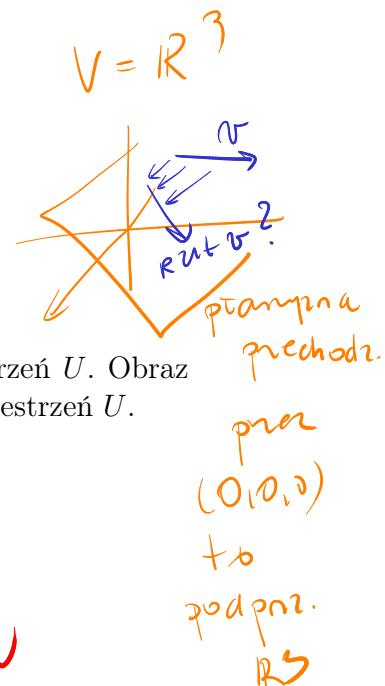
Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową.

Definicja 9.4.1. Operator liniowy $\pi \in \text{End}(V)$ dany wzorem

$$\forall v \in V \quad \pi(v) = u, \quad \text{gdzie } v - u \perp U,$$

nazywamy rzutowaniem ortogonalnym lub projekcją ortogonalną na podprzestrzeń U . Obraz wektora v poprzez π nazywamy rzutem ortogonalnym wektora $v \in V$ na podprzestrzeń U .

π_U proj



Twierdzenie 9.4.2 (Jednoznaczność rzutu ortogonalnego). Jeśli $\dim U < \infty$, to wówczas dla dowolnego $v \in V$ istnieje jednoznacznie wyznaczony rzut ortogonalny $u \in U$ tego wektora na podprzestrzeń U .

i) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest dowolną bazą podprzestrzeni U , wówczas $u = \pi(v) =$

$$u = \text{lin}\{b_1, \dots, b_k\}$$

$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]_{\mathcal{B}}$, gdzie

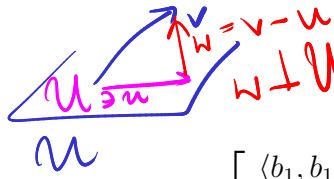
$$\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \langle v, b_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_k \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

ii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortogonalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2 + \dots + \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} b_k.$$

iii) Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni U , wówczas

$$u = \pi(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v, b_k \rangle b_k.$$



Macierz $\begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \dots & \langle b_2, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \langle b_k, b_2 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{bmatrix}$

występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy

macierzą Grama układu wektorów $(b_1, b_2, \dots, b_k)$.

Wniosek 9.4.3. Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś U jej podprzestrzenią liniową. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni U , zaś $A \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ macierzą, której kolumnami są kolejne wektory bazy $\mathcal{B}$. Wówczas AA^T jest reprezentacją macierzową projekcji ortogonalnej na podprzestrzeń U .

Przykład 9.4.4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ wyznaczmy rzut ortogonalny wektora $v = (1, 1, 1, 0)$ na podprzestrzeń $U = \text{lin}\{(2, 1, 1, 2), (1, 1, -3, 0)\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest bazą U , bowiem $r \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

METODA I

$$u := \pi_U(v) = ?, \quad w := v - u \perp U \Leftrightarrow w \perp b_1 := (2, 1, 1, 2) \wedge w \perp b_2 := (1, 1, -3, 0)$$

$u \in U$, zatem istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $u = \alpha b_1 + \beta b_2$. Wówczas

$$w = (1, 1, 1, 0) - \alpha(2, 1, 1, 2) - \beta(1, 1, -3, 0) = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha)$$

Otrzymujemy układ dwóch równań

$$\begin{cases} 0 = \langle w, b_1 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (2, 1, 1, 2) = 4 - 10\alpha, \\ 0 = \langle w, b_2 \rangle = (1 - 2\alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha + 3\beta, -2\alpha) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 - 11\beta. \end{cases}$$

Stąd $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = -\frac{1}{11}$ oraz

$\downarrow$ $\dim U = 2$ $\dim \mathbb{R}^n = 4$ $\star \star$ już poniżej

$$u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}} = \left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{11}\right]_{\mathcal{B}} = \frac{2}{5}b_1 - \frac{1}{11}b_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) = \left(\frac{39}{55}, \frac{17}{55}, \frac{37}{55}, \frac{4}{5}\right)$$

METODA II

Zauważmy, że baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ jest ortogonalna.

Istotnie $b_1 \circ b_2 = (2, 1, 1, 2) \circ (1, 1, -3, 0) = 0$. Na mocy twierdzenia 9.2.10 mamy

$$u = \left[\frac{\langle u, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle u, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right] \text{ Ale } \langle v, b_i \rangle = \langle u, b_i \rangle, \text{ zatem } u = \left[\frac{\langle v, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2}, \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\|b_2\|^2} \right]. \text{ Obliczamy}$$

$$\langle v, b_1 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (2, 1, 1, 2) = 4, \langle v, b_2 \rangle = (1, 1, 1, 0) \circ (1, 1, -3, 0) = -1 \text{ oraz } \|b_1\|^2 = 10, \|b_2\|^2 = 11. \text{ Stąd } u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{B}}.$$

UWAGA: Gdyby baza $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ nie była ortogonalna, zawsze możemy metodą Grama-Schmidta ją zortogonalizować i w dalszych rachunkach wykorzystać znalezioną bazę ortogonalną $\mathcal{C} := (c_1, c_2)$.

METODA III

Znajdziemy macierz rzutowania na U . Normalizujemy bazę $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2\}$, gdzie

$$b'_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2), b'_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3, 0). \text{ Niech } A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \end{bmatrix}. \text{ Macierz}$$

projekcji jest $AA^T = \begin{bmatrix} \frac{27}{55} & \frac{16}{55} & \frac{-4}{55} & \frac{2}{5} \\ \frac{16}{55} & \frac{21}{110} & \frac{-19}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{55} & \frac{-19}{110} & \frac{101}{110} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$. Stąd $AA^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{55} \\ \frac{17}{55} \\ \frac{37}{55} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

reprezentacja macierzy Π_U

$\Pi_U(b)$

$v = (1, 1, 1, 0)$

Interpretacja geometryczna metody Grama-Schmidta

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{E}^3$ i jej bazę $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ będzie szukaną bazą ortogonalną.

KROK I:

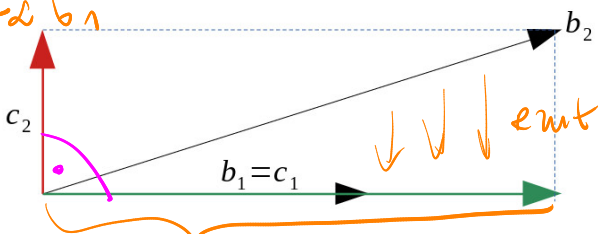
$$c_1 := b_1$$

KROK II:

$$c_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 = b_2 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_2)$$

$$c_2 + \alpha \cdot b_1 = b_2$$

$$c_2 = b_2 - \alpha \cdot b_1$$

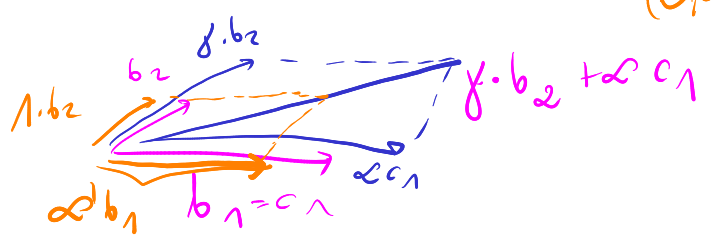


$$\alpha \cdot b_1$$

komp. prostopadły b_2 na b_1

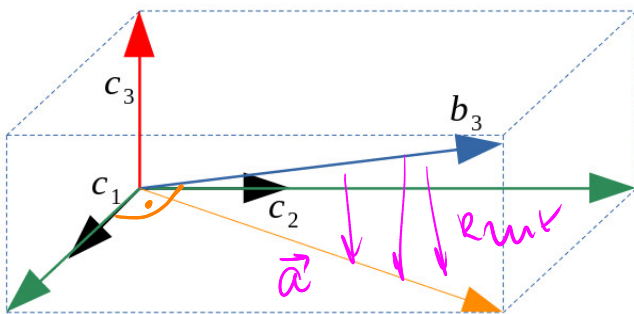
prosta kolumna wektorem $\text{lin}\{c_1\}$ kierunkowym jest c_1 przechodzi przez (OPP)

$$c_2 = 1 \cdot b_2 + \alpha \cdot c_1$$



KROK III:

$$c_3 := b_3 - \frac{\langle b_3, c_1 \rangle}{\|c_1\|^2} c_1 - \frac{\langle b_3, c_2 \rangle}{\|c_2\|^2} c_2 = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1\}}(b_3) - \pi_{\text{lin}\{c_2\}}(b_3) = b_3 - \pi_{\text{lin}\{c_1, c_2\}}(b_3)$$



$$\vec{a} + \vec{c}_3 = \vec{b}_3$$

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \vec{a}$$

9.5 Macierze ortogonalne i izometrie liniowe

Przykład 9.5.1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wektor $(1, 0, 0)$ ma długość 1, zaś wektor $(1, 6, 0)$ ma długość $\sqrt{37}$.

Przekształcając dowolne wektory w $\mathbb{R}^n$ za pomocą macierzy przejścia możemy zmieniać ich długość oraz kąt między nimi. Wyróżnimy teraz te macierze, które pozostawiają powyższe wielkości niezmienione.

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, jeśli $A^T A = I_n$, to wówczas $A^T A = A A^T$. Istotnie, z równości $A^T A = I_n$ wynika, że $\det A \neq 0$ oraz $A^T = A^{-1}$. Zatem $I = A A^{-1} = A A^T$.

Definicja 9.5.2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą ortogonalną*, jeśli $A^T A = I_n$ (lub równoważnie $A A^T = I_n$).

$$A^{-1} = A^T$$

Przykład 9.5.3. Macierz $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.

$$A \cdot A^T = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 9.5.4. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją *grupą ortogonalną* i oznaczamy symbolem $O(n)$.

Wniosek 9.5.5. i) Wyznacznik macierzy ortogonalnej jest równy 1 lub -1 .

ii) Wiersze macierzy ortogonalnej są wzajemnie ortogonalnymi wersorami (jako wektory w $\mathbb{R}^n$ względem standardowego iloczynu skalarnego). Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla kolumn.

iii) Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ to dwie bazy ortonormalne tej przestrzeni. Wówczas macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest macierzą ortogonalną. I odwrotnie, dowolna macierz ortogonalna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

Dowód. i) Wynika to z równości $1 = \det I_n = \det(A A^T) = (\det A)^2$. $\square$

Oczywiście nie każda macierz kwadratowa o wyznaczniku równym 1 lub -1 jest ortogonalna.

Przykładami mogą być macierze $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Łatwo sprawdzić, że $\det A = 1$, zaś $AA^T \neq I$. Podobnie $\det B = 1$ i mimo tego, że kolumny B są wektorami ortogonalnymi, to jednak $BB^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \neq I$.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 9.5.6. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy *izometrią liniową*, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|.$$

Definicja 9.5.7. Załóżmy, że $\dim V < \infty$. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy *ortogonalnym*, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną.

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

Uwaga 9.5.8. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

i) φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.

ii) $\text{Spec}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

Dowód. i) Jeśli $v \in \text{Ker} \varphi$, to $\varphi(v) = \mathbf{0}_V$, zatem $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 0$. Z definicji normy, $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $v = \mathbf{0}_V$. Ponadto $\dim V = r(\varphi)$, więc φ jest surjekcją.

ii) Dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 1 \cdot \|v\| = |\pm 1| \cdot \|v\|$. $\square$

Twierdzenie 9.5.9. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie skończenie wymiarową²² przestrzenią euklidesową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne.

i) φ jest izometrią liniową.

ii) φ zachowuje normę tzn. $\forall v \in V \quad \|\varphi(v)\| = \|v\|$.

iii) φ zachowuje iloczyn skalarny tzn. $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.

iv) φ jest operatorem ortogonalnym

²²Jeśli V jest nieskończenie wymiarowa, wówczas każdy operator ortogonalny jest izometrią liniową, jednak nie każda izometria liniowa musi być operatorem ortogonalnym. Przykładem może być przestrzeń l_2 ciągów zbieżnych z kwadratem, tj. takich rzeczywistych ciągów liczbowych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla których $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, wyposażona w iloczyn skalarny $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Operator liniowy $\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$ jest izometrią liniową, jednak nie jest ortogonalny, bowiem $\varphi \circ \varphi^* \neq \text{id}$, gdzie φ^* jest operatorem sprzężonym do φ .