

Oczywiście nie każda macierz kwadratowa o wyznaczniku równym 1 lub -1 jest ortogonalna.

Przykładami mogą być macierze $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Łatwo sprawdzić, że $\det A = 1$, zaś $AA^T \neq I$. Podobnie $\det B = 1$ i mimo tego, że kolumny B są wektorami ortogonalnymi, to jednak $BB^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \neq I$.

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Rozpatrujemy normę zadaną przez iloczyn skalarny.

Definicja 9.5.6. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy izometrią liniową, jeśli zachowuje on odległość, tzn. spełniony jest warunek

$$\forall u, v \in V \quad \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|.$$

Definicja 9.5.7. Załóżmy, że $\dim V < \infty$. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy ortogonalnym, jeśli jego macierz w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną.

Stwierdzenie, że macierz φ w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną, jest równoważne stwierdzeniu, że macierz φ w dowolnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą ortogonalną. Wynika to z faktu, że macierz przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi jest macierzą ortogonalną oraz z faktu, że macierze ortogonalne tworzą grupę. Oznacza to, że odwzorowanie ortogonalne to takie odwzorowanie liniowe, które przeprowadza pewną (każdą) bazę ortonormalną przestrzeni V na bazę ortonormalną.

Uwaga 9.5.8. Niech $\varphi \in \text{End}(V)$ będzie izometrią liniową. Wówczas

- φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.
- $\text{Spec}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$

Dowód. i) Jeśli $v \in \text{Ker} \varphi$, to $\varphi(v) = \mathbf{0}_V$, zatem $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 0$. Z definicji normy, $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy $v = \mathbf{0}_V$. Ponadto $\dim V = r(\varphi)$, więc φ jest surjekcją.

ii) Dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 1 \cdot \|v\| = |\pm 1| \cdot \|v\|$. $\square$

Twierdzenie 9.5.9. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie skończenie wymiarową²² przestrzenią euklidesową oraz niech $\varphi \in \text{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne.

- φ jest izometrią liniową.
- φ zachowuje normę tzn. $\forall v \in V \quad \|\varphi(v)\| = \|v\|$.
- φ zachowuje iloczyn skalarny tzn. $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.
- φ jest operatorem ortogonalnym

²²Jeśli V jest nieskończenie wymiarowa, wówczas każdy operator ortogonalny jest izometrią liniową, jednak nie każda izometria liniowa musi być operatorem ortogonalnym. Przykładem może być przestrzeń l_2 ciągów zbieżnych z kwadratem, tj. takich rzeczywistych ciągów liczbowych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla których $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, wyposażona w iloczyn skalarny $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Operator liniowy $\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$ jest izometrią liniową, jednak nie jest ortogonalny, bowiem $\varphi \circ \varphi^* \neq \text{id}$, gdzie φ^* jest operatorem sprzężonym do φ .

$A' = Q^T A P$
 $\varphi \in \text{End}(V) \quad \boxed{Q=P}$
 $n \times n$
 $\|\varphi(v)\| = |\pm 1| \|v\|$
 $\downarrow$
 $1 = |\pm 1| \|v\|$

Wniosek 9.5.10. Izometrie liniowe *zachowują kąty*, tzn. jeżeli kąt pomiędzy wektorami u i v wynosi α , to kąt pomiędzy wektorami $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ również wynosi α .

Uwaga 9.5.11. Jeśli rozpatrujemy w $\mathbb{R}^n$ niestandardowy iloczyn skalarny, baza kanoniczna nie musi być ortonormalna. Nie zawsze zatem wystarczy badać macierz w bazie kanonicznej.

Przykład 9.5.12. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Rozważmy $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-y, x)$ oraz dwie bazy przestrzeni $\mathbb{R}^2$, bazę kanoniczną $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ oraz bazę $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 1), c_2 = (0, 1))$.

Możemy wypisać reprezentacje macierzowe odwzorowania φ .

$$A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie warunku $BB^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq I$ nic nam nie mówi o tym, czy φ jest przekształceniem ortogonalnym, bowiem baza $\mathcal{C}$ nie jest bazą ortonormalną rozważanej przestrzeni euklidesowej.

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Zatem z równości $AA^T = I$ wynika, że φ jest przekształceniem ortogonalnym przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Jest to rotacja o kąt prosty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (a zatem jasne jest, że zachowuje odległości).

Przykład 9.5.13. Rozważmy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dany wzorem $\varphi(x, y) = (-x + y, y)$ jest izometrią liniową?

Baza standardowa jest bazą ortonormalną, gdy rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Wyznamy macierz A endomorfizmu φ w tej samej bazie.

Otrzymujemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy, czy A jest ortogonalna.

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I$$

Zatem φ nie jest izometrią liniową.

Przykład 9.5.14. Rozważmy przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^2, g)$ z iloczynem skalarnym

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_2, \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

oraz odwzorowanie $\varphi(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^2 = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ nie jest ortonormalna, bowiem $g(e_1, e_2) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Zatem

z warunku $AA^T = I$ nie można wnioskować, że φ jest izometrią liniową.

Rozważmy bazę $\mathcal{C} = (c_1 = (1, 0), c_2 = (1, 2))$ oraz $B = M_\varphi(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Baza $\mathcal{C}$ jest ortonormalna, bowiem

$$g(c_1, c_2) = 1 - 1 = 0, \|c_1\|^2 = g(c_1, c_1) = 1, \|c_2\|^2 = g(c_2, c_2) = 1 - 1 - 1 + 2 = 1.$$

Z warunku $BB^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \neq I$ można wnioskować, że φ nie jest izometrią liniową w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^2, g)$.

Alternatywnie można zauważyć, że $\|c_2\| = 1$, zaś $\|\varphi(c_2)\| = \|(-2, 1)\| = \sqrt{4 + 1 + 1 + \frac{1}{2}} \neq 1$.
Zatem φ nie zachowuje normy.

Izometrie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym

Jeśli $v = (v_x, v_y, v_z)$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$, to symbolem v^T oznaczamy odpowiadający mu wektor kolumnowy $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$.

n = 1

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowe, zatem $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$

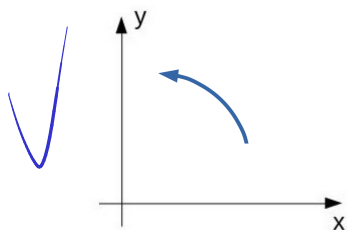
φ jest izometrią, zatem $|x| = |ax| = |a| \cdot |x|$ oraz $a = \pm 1$.

Otrzymujemy dwie izometrie liniowe $\varphi_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$, czyli $\varphi_1(x) = x$ oraz φ_2 takie, że $\varphi_2(x) = -x$.

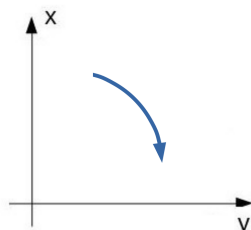
n = 2

Orientacja płaszczyzny

Jeśli obrót osi Ox dookoła punktu O o kąt $\frac{\pi}{2}$ doprowadzający do pokrycia się jej z osią Oy odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to mówimy, że układ jest *prawoskrętny* (*zorientowany dodatnio*), a jeśli zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to *lewoskrętny*. O płaszczyźnie, na której ustalono kierunek dodatni obrotu, mówimy, że została *zorientowana*.



układ prawoskrętny



układ lewoskrętny

Poniżej rozważamy płaszczyznę zorientowaną dodatnio.

Podejście algebraiczne

Z założenia $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest liniowe, zatem możemy rozważyć jego macierz w bazie standardowej

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Wiemy, że macierz A jest ortogonalna oraz $\det A = \pm 1$.

$$\text{Z równości } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^T A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy układ równań $\begin{cases} a^2 + b^2 = \|[a, b]\|^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = \|[c, d]\|^2 = 1 \\ ac + bd = [a, b] \circ [c, d] = 0 \end{cases}$ ($(a, b) \perp (c, d)$), $(a, b), (c, d)$ wektory

Punkty $(a, b), (c, d)$ leżą na okręgu jednostkowym, zatem istnieje taki kąt α , że $a = \cos \alpha$ oraz $b = \sin \alpha$. Wówczas na mocy warunku ortogonalności $ac + bd = 0$ mamy, że $c = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$, $d = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ lub też $c = \cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $d = \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = -\cos \alpha$. Podsumowując,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

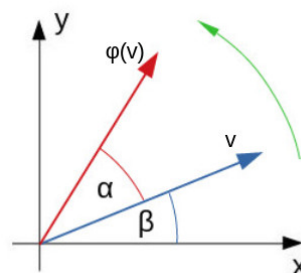
1) W pierwszym przypadku $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Niech $v = (x, y) = (r \cos \beta, r \sin \beta)$. Obliczamy $\varphi(v)$.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Mamy do czynienia z rotacją (obrotom) o kąt α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jeśli kąt α jest dodatni). Odwzorowanie oznaczamy symbolem R_α lub $R(\alpha)$.

Macierzą obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (obrotu o kąt $-\alpha$) będzie

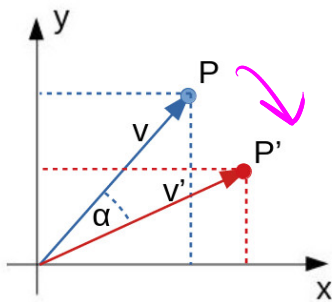
$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



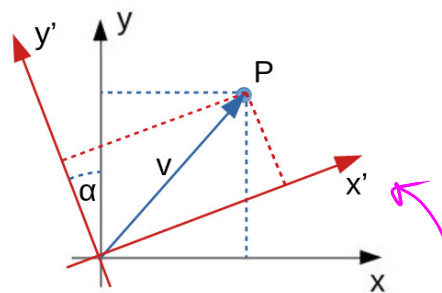
Zauważmy jeszcze, że $\det(A - tI) = (a - t)^2 + b^2$ i $\text{Spec}(A) = \emptyset$.

Macierz A nie jest diagonalizowalna. Ponadto rotacja nie zmienia orientacji układu współrzędnych.

Uwaga 9.5.15. W naszych rozważaniach przyjęliśmy prawoskrętny układ współrzędnych i obracaliśmy wektor (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Gdybyśmy zmienili układ na lewoskrętny, ruch odbywałby się w przeciwnym kierunku. Alternatywne podejście używa obrotu osi układu współrzędnych. Wówczas wyliczona macierz obrotu reprezentuje obrót osi o ten sam kąt ale w przeciwnym kierunku (zgodnie ze wskazówkami zegara).



Punkt (wektor) zmienia swoje położenie. Zmieniają się jego współrzędne w układzie współrzędnych.

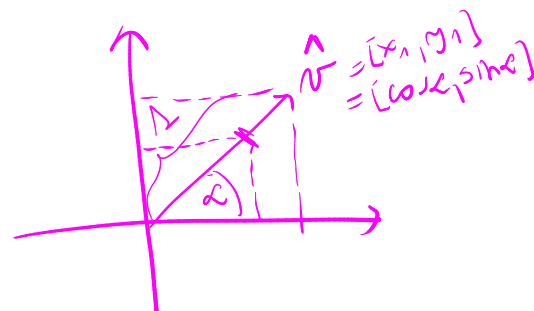
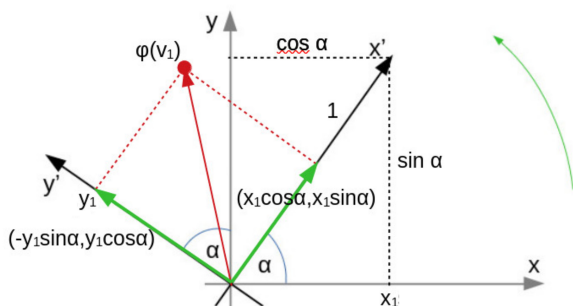
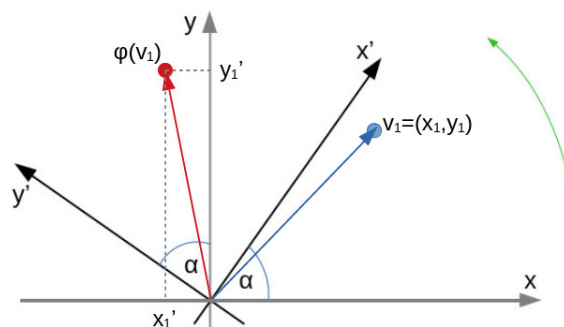
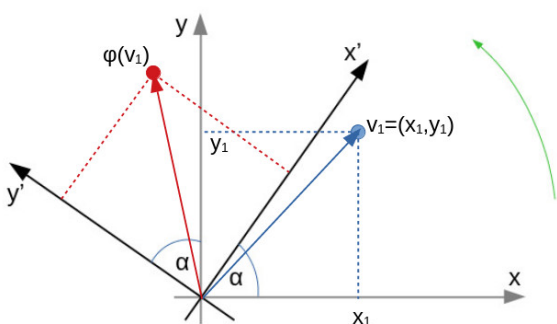


Punkt (wektor) są nieruchome. Obracamy układ współrzędnych, tzn. dokonujemy zmiany bazy. W nowej bazie punkt ma nowe współrzędne.

Współrzędne punktu P' w “starej bazie” (rysunek po lewej) są takie same, jak współrzędne punktu P w “nowej bazie” (rysunek po prawej).

Podejście geometryczne

Obrótem układu współrzędnych o kąt α nazywamy obrót bez zmiany początku układu oraz bez zmiany jednostek miary wzdłuż wszystkich osi.



$$\varphi(v_1) = (x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)$$

Przykład 9.5.16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{identyczność, tj. rotacja o kąt miary } 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \pi$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{rotacja o kąt miary } \frac{3}{2}\pi$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -y & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -y & x \end{pmatrix} = \bigcirc$$

Przykład 9.5.17. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = 1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje rotację. Znajdziemy kąt obrotu.

Ponieważ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, zatem α ma miarę $\frac{2}{3}\pi$ lub $\frac{4}{3}\pi$. Ponadto $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zaś $\sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem jest to obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{4}{3}\pi$ lub (równoważnie) obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{2}{3}\pi$.

Przykład 9.5.18. Wyznamy równanie prostej l' powstałej przez obrót prostej l o równaniu $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ o kąt $\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy $x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$, $y' = x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Dodając i odejmując równania stronami, obliczamy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$. Wstawiając do równania $y = mx$, otrzymujemy $-x' + y' = m(x' + y')$. Zatem $(1 - m)y' = (1 + m)x'$. Równaniem prostej obróconej jest $(m + 1)x + (m - 1)y = 0$.

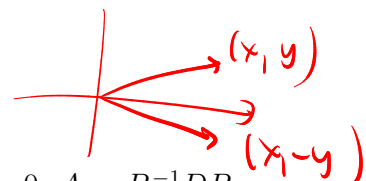
2) W drugim przypadku $\det A = -1$. Obliczamy

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & -a - t \end{vmatrix} = -(a - t)(a + t) - b^2 = t^2 - a^2 - b^2 = t^2 - 1.$$

Zatem $\text{Spec}(A) = \{-1, 1\}$ i macierz A jest diagonalizowalna. W bazie wektorów własnych macierz operatora φ jest postaci $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Niech $v = (x, y)$. Obliczamy współrzędne $\varphi(v)$ w bazie wektorów własnych.

$$D \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Mamy do czynienia z symetrią ortogonalną (odbiciem) względem prostej $y = 0$. $A = P^{-1}DP$, gdzie P to macierz przejścia do bazy wektorów własnych. Zmiana bazy oznacza zmianę układu współrzędnych z zachowaniem początku układu współrzędnych (bo przekształcenie jest liniowe). Zatem $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest symetrią ortogonalną względem pewnej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$. Jaka to prosta?



$$y = ax$$

$$a = \tan \beta$$



Podjęcie algebraiczne

Przypuśćmy, że l jest prostą o równaniu $y = \tan \beta \cdot x$. Aby znaleźć odbicie wektora v względem l posłużymy się inną bazą ortonormalną. Pierwszy wektor bazowy b_1 będzie wersorem leżącym na prostej l , a drugi b_2 będzie wersorem do niego prostopadłym. Zatem $b_1 = (\cos \beta, \sin \beta)$, $b_2 = (-\sin \beta, \cos \beta)$. Istnieją składowe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $v = c_1 b_1 + c_2 b_2$. Obliczamy

$$a = \tan \beta$$

$$v^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta + c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Podobnie obliczamy $\varphi(v) = c_1 b_1 - c_2 b_2$.

$$\varphi(v)^T = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} - c_2 \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \beta + c_2 \sin \beta \\ c_1 \sin \beta - c_2 \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

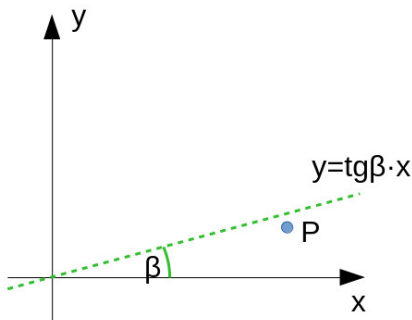
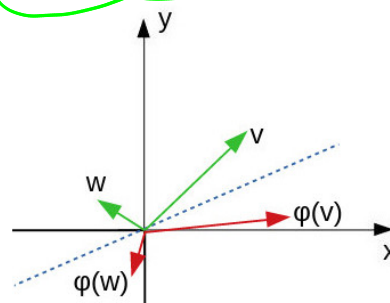
Stąd

$$\begin{aligned} \varphi(v)^T &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} v^T = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} v^T \end{aligned}$$

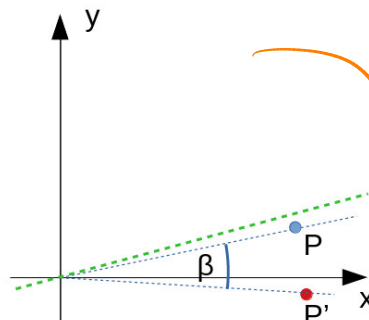
Czyli $\alpha = 2\beta$ i macierz $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$ reprezentuje odbicie względem prostej o równaniu $y = \tan \frac{\alpha}{2} \cdot x$.

$$A^{-1} = A^T$$

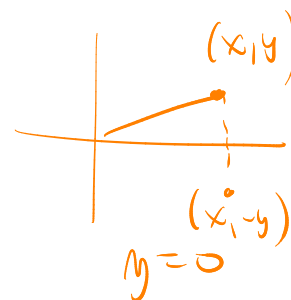
Podjęcie geometryczne

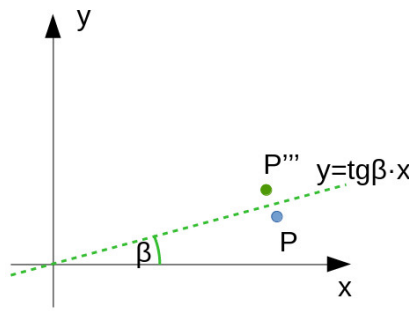
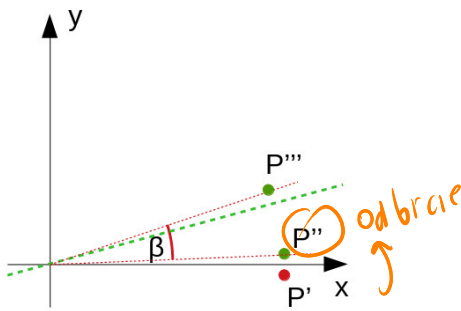


$$y = \tan \beta \cdot x$$



$$y = 0$$





obrot
z powrotem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

1) Obracamy punkt o kąt $-\beta$.

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

2) Dokonujemy odbicia względem prostej $y = 0$.

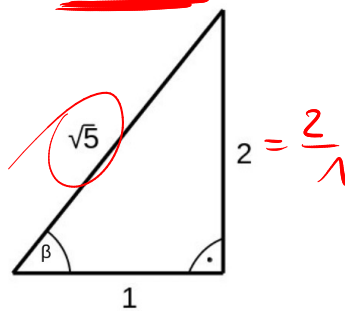
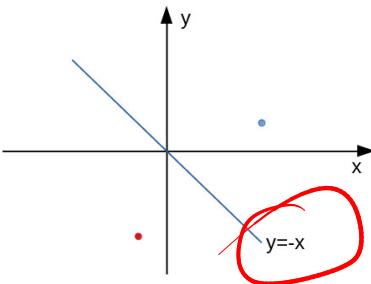
3) Obracamy punkt o kąt β .

4) Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix}$$

Wniosek 9.5.19. Izometria liniowa płaszczyzny jest rotacją (obrotem) wokół punktu $(0, 0)$ o pewien kąt lub symetrią ortogonalną (odbiciem) względem pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Przykład 9.5.20. Macierzą symetrii ortogonalnej względem prostej $y = -x$ jest macierz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$.



$$\tan \beta = \frac{2}{1} = \frac{x}{1}$$

Przykład 9.5.21. Wyznamy macierz izometrii liniowej płaszczyzny będącej symetrią ortogonalną względem prostej $y = 2x$.

METODA I: Jeśli $\tan \beta = 2$, to wówczas $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obliczamy $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4}{5}$ oraz $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = -\frac{3}{5}$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

METODA II: Niech F oznacza poszukiwaną macierz, zaś F_0 macierz odbicia względem prostej $y = 0$. Wówczas $F = R(\beta)F_0R(-\beta)$. Ponieważ $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, zatem

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.5.22. Składaniu odwzorowań odpowiada mnożenie reprezentujących ich macierzy w pewnej ustalonej bazie. Geometrycznie oznacza to, że układ współrzędnych jest nieruchomy, a obrotowi/odbiciu podlegają wektory.

Przykład 9.5.23. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Obliczając wyznacznik $\det A = -1$, wnioskujemy, że macierz ta reprezentuje odbicie. Znajdziemy oś symetrii.

$$A \cdot A^T = I$$

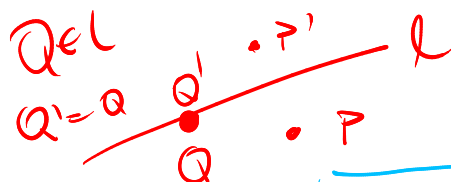
izom.
lin.

Punkty na osi symetrii nie zmieniają swego położenia w wyniku obicia. Są to punkty (x, y)

spełniające równanie $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 3x + 4y = -5x \\ -4x + 3y = 5y \end{cases}$.

Zatem prosta $y = -2x$ jest osią symetrii.



Uwaga 9.5.24. Symetria ortogonalna φ jest inwolucją, tzn. spełnia warunek $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. Równoważnie, jeśli A jest macierzą odbicia φ , to wówczas $A^2 = I$ lub inaczej $A^{-1} = A$.

TEMAT: *Przestrzenie unitarne*

10.1 Definicja przestrzeni unitarnej i podstawowe własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$, jeśli $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, to wówczas $\bar{z} = x - iy$.

Definicja 10.1.1. Funkcję $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy iloczynem skalarnym (iloczynem hermitowskim), jeżeli spełnia ona następujące warunki:

$$i) \forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \alpha s(u, w) + \beta s(v, w),$$

$$ii) \forall u, v \in V \quad s(u, v) = \overline{s(v, u)},$$

$$iii) \forall v \in V \quad s(v, v) \geq 0 \quad \wedge \quad s(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}_V.$$

W domyśle $s(v, v) \in \mathbb{R}$

Parę (V, s) nazywamy wówczas przestrzenią unitarną. Zamiast $s(u, v)$ będziemy również pisać $\langle u, v \rangle$.

Uwaga 10.1.2. Każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unitarną.

Twierdzenie 10.1.3. Niech (V, s) będzie przestrzenią unitarną. Wówczas

$$i) \forall u, v, w \in V \quad s(u, v + w) = s(u, v) + s(u, w),$$

$$ii) \forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad s(u, \alpha v) = \alpha s(u, v),$$

$$iii) \forall v \in V \quad s(v, \mathbf{0}_V) = 0 = s(\mathbf{0}_V, v),$$

Przykład 10.1.4. Poniższe funkcje są iloczynami skalarnymi.

1) *Standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{C}^n$ nazywamy $s : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ taką, że*
 $\forall u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \quad s(u, v) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$

2) Niech l^2 będzie zbiorem ciągów $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ liczb zespolonych takich, że ciąg $a_n = \sum_{i=1}^n z_i^2$ jest zbieżny. Granicę ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oznaczamy symbolem $\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2$. l^2 jest przestrzenią wektorową ze zwykłymi działaniami dodawania ciągów po współrzędnych i mnożenia przez liczbę. Definiujemy iloczyn hermitowski

$$\langle (z_i)_{i \in \mathbb{N}}, (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_i \overline{w_i}.$$

knęwana p. res polonij

3) Niech $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ciągła}\}$. Jest to przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{C}$, tj. zespolona przestrzeń wektorowa. Jej elementami są funkcje postaci $f(t) = u(t) + iv(t)$, gdzie $u, v \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Na przykład $f(t) = t + it^3$, $t \in [-1, 1]$. Definiujemy iloczyn hermitowski

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

4) Zdefiniujemy iloczyn skalarny w przestrzeni macierzy $M_n(\mathbb{C})$. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}} = \text{tr}(A^T \overline{B})$$

Definicja 10.1.5. Macierzą sprzężoną do macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$, której każdy element jest liczbą sprzężoną do odpowiadającego mu elementu macierzy A , tj. $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Oznaczamy ją symbolem $\overline{A}$.

Przykład 10.1.6. Niech $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ -3 & 7-5i & i \\ -1-i & 1+i & 1 \end{bmatrix}$. Wówczas $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 0 \\ -3 & 7+5i & -i \\ -1+i & 1-i & 1 \end{bmatrix}$.

↑ wyraz po wyrazie

Twierdzenie 10.1.7.

i) $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \implies \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

ii) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), a \in \mathbb{C} \implies \overline{a \cdot A} = \overline{a} \cdot \overline{A}$

iii) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \wedge B \in M_{n \times p}(\mathbb{C}) \implies \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

iv) $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$ dla macierzy odwracalnej A

v) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \implies \overline{A} = A$

vi) $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ dla $A \in M_n(\mathbb{C})$

← $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Definicja 10.1.8. Sprzężeniem hermitowskim macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ taką, że $B = \overline{A}^T$, $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Oznaczamy ją symbolem A^* . Stosuje się również oznaczenia A^H , $A^\dagger$.

Przykład 10.1.9. Niech $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ -3 & 7-5i & i \\ -1-i & 1+i & 1 \end{bmatrix}$. Wówczas $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & -3 & 0 \\ 2 & 7+5i & -i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 10.1.10. Niech $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), C \in M_{n \times k}(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}$. Wówczas

i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

ii) $(AC)^* = C^* A^*$

$(AB)^T = B^T A^T$

iii) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$

iv) $(A^*)^* = A$

v) Jeśli $n = m$, to $\det A^* = \overline{\det A}$ oraz $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$.

vi) Jeśli $n = m$ oraz $\alpha \in \operatorname{Spec}(A)$, to $\bar{\alpha} \in \operatorname{Spec}(A^*)$.

Definicja 10.1.11. Macierz kwadratową A nazywamy macierzą

i) *hermitowską*, jeśli $A = A^*$,

ii) *antyhermitowską*, jeśli $A = -A^*$,

Jeśli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą hermitowską, to oznacza to, że $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. W szczególności dla $i = j$ mamy $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$. Innymi słowy elementy leżące na diagonalu macierzy hermitowskiej są rzeczywiste.

Przykładem macierzy hermitowskiej jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$.

Wartości własne macierzy hermitowskiej są rzeczywiste, co pozwala sformułować następującą definicję.

Definicja 10.1.12. Macierz hermitowską $A_n(\mathbb{C})$ nazywamy dodatnio (ujemnie) określoną, jeśli wszystkie jej wartości własne są dodatnie (ujemne).

Uwaga 10.1.13. Jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni V , oraz $u, v \in V$, $u = [x_1, x_2, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$, $v = [y_1, y_2, \dots, y_n]_{\mathcal{B}}$, to każdy iloczyn skalarny jest postaci $s(u, v) = X^T A \bar{Y}$, gdzie

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ oraz } A = [a_{ij}] \in M_n(K), \text{ gdzie } a_{ij} = s(b_i, b_j).$$

Warunki i) oraz ii) w definicji iloczynu hermitowskiego równoważne są stwierdzeniu, że s jest postaci $s(u, v) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j$ oraz macierz A jest macierzą hermitowską.

Jeśli $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ jest iloczynem hermitowskim, to wówczas $s(v, v) = \overline{s(v, v)}$, dla dowolnego $v \in V$. Innymi słowy $s(v, v)$ jest liczbą rzeczywistą. Zatem warunek iii) w definicji iloczynu hermitowskiego ma sens. Jest on równoważny stwierdzeniu, że macierz A jest dodatnio określona.

Przykład 10.1.14. Niech $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dane będzie wzorem $f(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + i z_2 \bar{w}_1 - i z_1 \bar{w}_2$, gdzie $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$.

Odwzorowanie f jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną.

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ mamy

$$f(\alpha z + \beta v, w) = f((\alpha z_1 + \beta v_1, \alpha z_2 + \beta v_2), (w_1, w_2)) = (\alpha z_1 + \beta v_1) \bar{w}_1 + i(\alpha z_2 + \beta v_2) \bar{w}_1 - i(\alpha z_1 + \beta v_1) \bar{w}_2 =$$

testujemy $[z_1, z_2] [\hat{1} - i] [\bar{w}_1]$ = * formula

$$= \alpha f((z_1, z_2), (w_1, w_2)) + \beta f((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \alpha f(z, w) + \beta f(v, w),$$

Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ spełnia warunek $A = A^*$. pau
myśl

Wartości własne macierzy hermitowskiej są rzeczywiste (omówione w dalszej części wykładu). Sprawdźmy czy A jest dodatnio określona, co równoważne jest stwierdzeniu, że wszystkie jej wartości własne są dodatnie.

Obliczamy $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$. Ponieważ $\lambda_1 < 0$, macierz A nie jest dodatnio określona. Zatem f nie jest iloczynem hermitowskim.

Wiele stwierdzeń jest analogicznych jak w przypadku przestrzeni euklidesowych.

Można udowodnić, że jeśli $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią unitarną, to odwzorowanie $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $\forall v \in V \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, jest normą w przestrzeni V . Zachodzi również nierówność Schwarz'a $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Przykład 10.1.15. Rozważamy w $\mathbb{C}^3$ standardowy iloczyn skalarny. Dla danego wektora $(p, q, r) \in \mathbb{C}^3$ mamy $\|(p, q, r)\| = \sqrt{p\bar{p} + q\bar{q} + r\bar{r}} = \sqrt{|p|^2 + |q|^2 + |r|^2}$. Obliczymy normę wektora $u = (3, 4i, 0) \in \mathbb{C}^3$.

$$\|(3-i, 4i, 0)\| = \sqrt{(3-i)(3+i) - 16i^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

Wektory u, v nazywamy *ortogonalnymi*, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero. Piszemy wówczas $u \perp v$. Układ wektorów $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ nazywamy *układem ortogonalnym*, jeżeli $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Układ wektorów nazywamy *układem ortonormalnym*, jeśli jest układem ortogonalnym i każdy wektor jest unormowany, czyli

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases} = \delta_{ij}$$

Każdy ortonormalny układ wektorów jest liniowo niezależny. Jeśli przestrzeń wektorowa jest skończenie wymiarowa, to każdy ortonormalny układ wektorów można uzupełnić do bazy ortonormalnej.

Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni unitarnej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, zaś $v, w \in V$, to wówczas $v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i$ oraz $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle \langle b_i, w \rangle$.

Zatem jeśli $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest bazą przestrzeni unitarnej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, zaś $v, w \in V$, $v = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]_{\mathcal{B}}$, to wówczas baza $\mathcal{B}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy gdy $\langle u, w \rangle = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n$.

10.2 Macierze unitarne i normalne

Definicja 10.2.1. Macierz kwadratową A nazywamy macierzą

i) normalną, jeśli $AA^* = A^*A$,

ii) unitarną, jeśli $AA^* = A^*A = I$ lub równoważnie $A^{-1} = A^*$.

$\mathbb{R} \quad \mathbb{C}$

$$A^T \quad A^* = \bar{A}^T$$

$$\boxed{A^T A = I} \quad \boxed{A^* A = I}$$

ortog. unit.

$$A = A^T$$

$$A = A^* = \overline{A}^T$$

Uwaga 10.2.2. i) Każda macierz rzeczywista symetryczna (traktowana jako macierz nad ciałem $\mathbb{C}$) jest hermitowska, a każda macierz rzeczywista antysymetryczna (traktowana jako macierz nad ciałem $\mathbb{C}$) jest antyhermitowska.

ii) Macierz rzeczywista ortogonalna (traktowana jako macierz nad ciałem $\mathbb{C}$) jest macierzą unitarną.

$$A A^T = I$$

$$A A^* = A \cdot \overline{A}^T = I$$

iii) Macierze hermitowskie, antyhermitowskie, unitarne są macierzami normalnymi.

iv) Każdą macierz zespoloną kwadratową można zapisać jako sumę macierzy hermitowskiej i macierzy antyhermitowskiej.

Przykład 10.2.3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}, A^* = A, AA^* = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{bmatrix} = 3A \neq I$$

$$AB = I$$

Macierz jest hermitowska (a zatem normalna), ale nie unitarna.

$$AA^* = A^2 = A^*A$$

$$BA = I$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, B^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, BB^* = I$$

$$AA^* = I \Rightarrow A^*A = I$$

Macierz nie jest hermitowska, ani antyhermitowska, ale jest unitarna (a zatem normalna).

$$C = \begin{bmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ -i \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, C = C^*, CC^* = I$$

Macierz jest hermitowska i unitarna (a zatem normalna).

$$AA^* = A^*A$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{bmatrix}, D^* = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{bmatrix}, DD^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 13 \end{bmatrix}$$

Macierz nie jest hermitowska, ani antyhermitowska, ani normalna, ani unitarna.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E^* = E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, EE^* = E^*E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz nie jest hermitowska, ani antyhermitowska, ani unitarna, ale jest normalna.

$$AA^* = I$$

$$\det(AA^*) = 1 = \det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \det \overline{A} = |\det A|^2$$

Twierdzenie 10.2.4. Jeśli macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ jest unitarna, to wówczas $|\det A| = 1$.

Wyznacznik macierzy unitarnej to liczba zespolona o module równym 1, tj. leżąca na okręgu jednostkowym. W szczególności oznacza to, że macierze unitarne są nieosobliwe.

5-109

Twierdzenie 10.2.5. i) Zbiór macierzy unitarnych stopnia n wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą. Nazywamy ją grupą unitarną i oznaczamy symbolem $U(n)$. Macierze te reprezentują izometrie liniowe przestrzeni V .