

$$\checkmark A \in U(n) : \det A = 1$$

- ii) Zbiór macierzy unitarnych stopnia n o wyznaczniku równym 1 wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę. Grupę tę nazywamy specjalną grupą unitarną i oznaczamy symbolem $SU(n)$.
- iii) Niech $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ będą dwiema bazami ortonormalnymi przestrzeni unitarnej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$. Macierz przejścia $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ jest macierzą unitarną. I odwrotnie, dowolna macierz unitarna jest macierzą przejścia między dwiema bazami ortonormalnymi.

10.3 Operatory liniowe w przestrzeniach unitarnych

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ oraz $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ będą przestrzeniami unitarymi nad tym samym ciałem K , zaś $\varphi : V \rightarrow W$ odwzorowaniem liniowym.

Definicja 10.3.1. Odwzorowanie $\varphi^* : W \rightarrow V$ spełniające warunek

$$\forall v \in V, w \in W \quad \langle \varphi(v), w \rangle_W = \langle v, \varphi^*(w) \rangle_V$$

nazywamy odwzorowaniem sprzężonym do przekształcenia liniowego φ .

Twierdzenie 10.3.2. i) Jeśli dla danego odwzorowania liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ istnieje φ^* , to wówczas φ^* również jest odwzorowaniem liniowym i jest jedyne.

ii) Jeśli V oraz W są przestrzeniami unitarnymi skończenie wymiarowymi, zaś $A = M_\varphi(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania liniowego φ w bazach ortonormalnych $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ przestrzeni V oraz W odpowiednio, to wówczas $M_{\varphi^*}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = A^*$.

iii) Jeśli V jest przestrzenią unitarną skończenie wymiarową, to dla dowolnego odwzorowania liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ istnieje φ^* .²³

Dowód. ii) Niech $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ to bazy ortonormalne przestrzeni V oraz W odpowiednio. Niech $v \in V, w \in W$ będą takie, że $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}}$, $w = [y_1, \dots, y_m]_{\mathcal{C}}$.

Oznaczmy $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$. Wówczas

$$\langle v, \varphi^*(w) \rangle_V = \langle \varphi(v), w \rangle_W = (AX)^T \bar{Y} = X^T A^T \bar{Y} = X^T \overline{A^* Y}. \quad \square$$

UWAGA: Operator sprzężony jest jedyny w danej przestrzeni unitarnej (zależy on od iloczynu skalarnego!).

Twierdzenie 10.3.3. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ oraz $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ będą przestrzeniami unitarymi nad tym samym ciałem K , zaś $\varphi, \psi : V \rightarrow W$ odwzorowaniami liniowymi, dla których istnieją φ^*, ψ^* . Wówczas prawdziwe są następujące równości.

$$i) (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

²³W przypadku, gdy V jest nieskończenie wymiarowa, dla danego φ może nie istnieć φ^* .

- ii) $(\alpha \cdot \varphi)^* = \bar{\alpha} \cdot \varphi^*$
 iii) $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$
 iv) $(\varphi^*)^* = \varphi$

Przykład 10.3.4. Rozważmy przestrzenie $\mathbb{C}^2$ oraz $\mathbb{C}^3$ ze standardowymi iloczynami skalarnymi i standardowymi bazami $\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^3$, które to są bazami ortonormalnymi.

Niech odwzorowanie liniowe $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ dane będzie wzorem

$$\dim \mathbb{C}^2 = 2 < \infty \quad \varphi(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2, (2+i)z_1, -3iz_1 + \sqrt{2}z_2).$$

Na mocy twierdzenia 10.3.2 istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\varphi^* : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Podamy jego

wzór. Niech $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^2, \mathcal{B}_k^3) \in M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$. Wyznaczamy $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2+i & 0 \\ -3i & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ oraz obliczamy

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 3i \\ -i & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C}).$$

Ponownie na mocy twierdzenia 10.3.2 $A^* = M_{\varphi^*}(\mathcal{B}_k^3, \mathcal{B}_k^2)$. Zatem φ^* dane jest wzorem

$$\varphi^*(w_1, w_2, w_3) = (w_1 + (2-i)w_2 + 3iw_3, -iw_1 + \sqrt{2}w_3).$$

przykładowo

Weźmy $v = (1+i, -i) \in \mathbb{C}^2$ oraz $w = (0, 2+3i, \pi i) \in \mathbb{C}^3$. Wówczas

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v), w \rangle &= \langle \varphi(1+i, -i), (0, 2+3i, \pi i) \rangle = \langle (2+i, 1+3i, 3-(3+\sqrt{2})i), (0, 2+3i, \pi i) \rangle = \\ &= (1+3i)(2-3i) + (3-(3+\sqrt{2})i)(-\pi i) = 11 - (3+\sqrt{2})\pi + 3(1-\pi)i \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi^*(w) \rangle &= \langle (1+i, -i), \varphi^*(0, 2+3i, \pi i) \rangle = \langle (1+i, -i), (7-3\pi+4i, \pi\sqrt{2}i) \rangle = \\ &= (1+i)(7-3\pi-4i) + (-i)(-\pi\sqrt{2}i) = 11 - (3+\sqrt{2})\pi + 3(1-\pi)i. \end{aligned}$$

W dalszej części rozważamy już jedynie endomorfizmy przestrzeni unitarnej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Definicja 10.3.5. Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy

- i) *samosprzężonym* lub *hermitowskim*, jeśli $\varphi^* = \varphi$,
 ii) *antyhermitowskim*, jeśli $\varphi^* = -\varphi$,
 iii) *unitarnym*, jeśli $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^* = \text{id}_V$,
 iii) *normalnym*, jeśli $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$.

normalne $\varphi : V \rightarrow V$
 herm
 unit

A_φ
 kwadratowa

W przypadku rzeczywistym operator hermitowski (antyhermitowski) nazywamy *symetrycznym* (*antysymetrycznym*), zaś operator unitarny to operator *ortogonalny*.

Uwaga 10.3.6. i) Każdy operator hermitowski, antyhermitowski bądź unitarny jest operatorem normalnym.

- ii) Jeśli V jest przestrzenią skończenie wymiarową, to operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ jest hermitowski / antyhermitowski / unitarny / normalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja macierzowa w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni V jest macierzą hermitowską / antyhermitowską / unitarną / normalną.

10.4 Unitarna diagonalizacja macierzy normalnych

Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Jeśli dla danego operatora liniowego $\varphi \in \text{End}(V)$ (reprezentowanego w bazie standardowej przestrzeni V przez macierz A) istnieje baza ortonormalna $\mathcal{B}$ przestrzeni $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, w której macierz operatora φ jest diagonalna, to mówimy wówczas, że operator φ jest *unitarnie diagonalizowalny* oraz macierz A jest *unitarnie diagonalizowalna*. Istnieje wówczas macierz unitarna $P \in U(n)$, będącą macierzą przejścia od bazy standardowej do bazy $\mathcal{B}$, taka, że $P^{-1}AP = P^*AP$ jest macierzą diagonalną.

Twierdzenie 10.4.1. Przy powyższych założeniach, prawdziwe są poniższe stwierdzenia.

- i) Operator liniowy $\varphi \in \text{End}(V)$ jest unitarnie diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on operatorem normalnym.

$$\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$$

$$AA^* = A^*A$$

- ii) Macierz jest unitarnie diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą normalną.

24

Twierdzenie 10.4.2. i) Wartości własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste. Wartości własne macierzy hermitowskiej (lub rzeczywistej symetrycznej) są rzeczywiste.

- ii) Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym operatora hermitowskiego (macierzy hermitowskiej lub rzeczywistej symetrycznej) są wzajemnie ortogonalne.

- ii) Każdej wartości własnej o krotności algebraicznej k operatora hermitowskiego (macierzy hermitowskiej lub rzeczywistej symetrycznej) odpowiada k liniowo niezależnych wektorów własnych.

Twierdzenie 10.4.3 (Twierdzenie spektralne dla operatorów i macierzy hermitowskich).

²⁴Macierze, które nie są macierzami normalnymi, nie są unitarnie diagonalizowalne. Nie oznacza to jednak, że nie są diagonalizowalne. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ nie jest macierzą normalną, bowiem $AA^T = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 17 \end{bmatrix} \neq A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$. Widmo macierzy A jest proste ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$), zatem jest ona diagonalizowalna.

i) Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną, zaś $\varphi \in \text{End}(V)$ operatorem hermitowskim. Wówczas istnieje taka baza ortonormalna przestrzeni V , że macierz operatora liniowego φ w tejże bazie jest macierzą diagonalną. Co więcej, elementy tej macierzy są liczbami rzeczywistymi.

ii) Dla każdej macierzy hermitowskiej $A \in M_n(\mathbb{C})$ istnieją macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz unitarna $P \in U(n)$ takie, że

$$P^* P = I \\ P^* = P^{-1}$$

$$P^{-1} A P = (P^* A P = D.$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest *unitarnie diagonalizowalna* ²⁵.

Wniosek 10.4.4 (Twierdzenie spektralne dla rzeczywistej macierzy symetrycznej). Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz diagonalna $D \in M_n(\mathbb{R})$ oraz macierz ortogonalna $P \in O(n)$ takie, że

ortogonalna

$$P^{-1} A P = P^T A P = D.$$

$$P P^T = I \\ P^{-1} = P^T$$

Mówimy wówczas, że macierz A jest *ortogonalnie diagonalizowalna* ^{26, 27}.

Przypomnijmy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in GL_n(K)$ taka, że $A = C^{-1} B C$. Jeśli dodatkowo C jest macierzą unitarną (ortogonalną), to mówimy, że A jest *unitarnie (ortogonalnie) podobna* do B .

Diagonalizacja macierzy za pomocą macierzy unitarnych:

- 1) Znajdujemy wartości własne i odpowiadające im wektory własne.
- 2) Normalizujemy wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym o krotności algebraicznej równej 1.
- 3) Wektory własne odpowiadające wartości własnej o krotności algebraicznej większej niż 1 dobieramy w taki sposób, by były ortogonalne i następnie normalizujemy.

Przykład 10.4.5. Macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ jest symetryczna, a zatem ortogonalnie diagonalizowalna. Obliczamy $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -t(t - 6)^2$. $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6\}$, przy czym $k_1 = 1, k_2 = 2$.

²⁵Innymi słowy, jest unitarnie podobna do macierzy diagonalnej.

²⁶Innymi słowy, jest ortogonalnie podobna do macierzy diagonalnej.

²⁷Zauważmy, że z powyższych twierdzeń nie wynika, że symetryczne macierze zespolone są (unitarnie) diagonalizowane. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ jest symetryczna, jednakże nie jest diagonalizowalna. Jej jedyną wartością własną jest $\lambda = 0$, o krotności algebraicznej równej 2 i krotności geometrycznej równej 1.

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\begin{cases} x = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Zatem $E_0 = \{(x, -2x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektor własny $u = (1, -2, 1)$ i normalizujemy go $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Zatem $E_6 = \{(2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$.

Wybieramy wektory własne $v = (2, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrujemy standardowy iloczyn skalarny. Oczywiście $\langle u, v \rangle = 0$ oraz $\langle u, w \rangle = 0$.

Zauważmy, że $\langle v, w \rangle = -2 \neq 0$, zatem v i w nie są do siebie ortogonalne. Zortogonalizujemy układ $\{v, w\}$ metodą Grama-Schmidta.

Niech $c_1 := v$. Poszukujemy $c_2 = w + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobierzmy α tak, by $\langle c_2, c_1 \rangle = 0$.

Obliczamy $\langle c_2, c_1 \rangle = \langle w + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle w, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle = (-2 + 0 + 0) + \alpha(4 + 1 + 0)$.

Skąd $5\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = \frac{2}{5}$ oraz $c_2 = w + \frac{2}{5}v = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Mamy $\langle c_1, c_2 \rangle = 0$. Normujemy wektory $\hat{c}_1 = \frac{c_1}{|c_1|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $\hat{c}_2 = \frac{c_2}{|c_2|} = \sqrt{\frac{5}{6}}(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$.

Rozważamy bazę $(\hat{u}, \hat{c}_1, \hat{c}_2)$. Macierz diagonalizująca ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

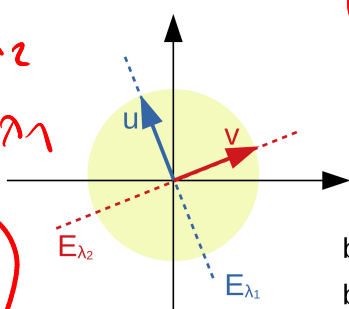
Można sprawdzić, że $PP^T = I$, zatem $P \in O(3)$ oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Uwaga 10.4.6. Ortogonalna diagonalizacja macierzy symetrycznej może być widziana jako rotacja osi układu współrzędnych w taki sposób, aby były one równoległe do wektorów własnych. Zobacz tutaj.

u, v - wekt. l. w. s.

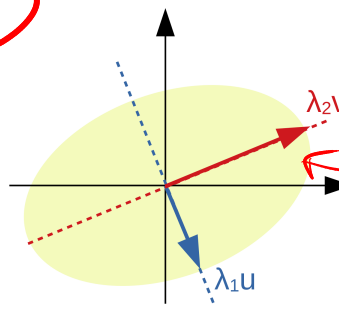
$v \in E_{\lambda_2}$
 $u \in E_{\lambda_1}$

$$A = PDP^{-1}$$



baza $C = (u, v)$
 baza $B^2_k = (e_1, e_2)$

A



$$Y = AX$$

$$P = P_{B^2_k \rightarrow C}$$

$$Y' = DX'$$

$$X' = PX$$

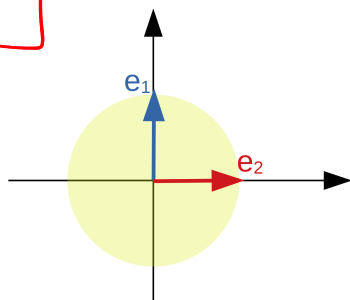
$$X = P^{-1}X'$$

$$\varphi(v) = \lambda_2 v$$

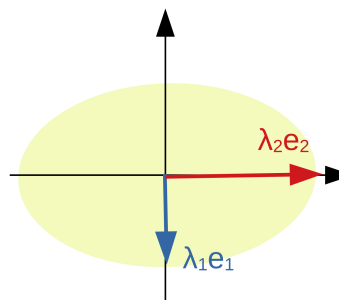
bez zmiany kierunku

$$PX' = X$$

$$X'$$



D



$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{bmatrix}$$

Widmo rzeczywiste

Uwaga 10.4.7. i) Wektory własne macierzy hermitowskiej na ogół są zespolone, zatem unitarna macierz diagonalizująca jest na ogół macierzą zespoloną.

ii) Rzeczywista macierz symetryczna jest macierzą hermitowską, zatem jej wartości własne są rzeczywiste. Ponieważ wartości własne i sama macierz są rzeczywiste, więc wektory własne można wybrać jako rzeczywiste, a w konsekwencji macierz diagonalizująca jest rzeczywistą macierzą ortogonalną.

iii) Macierze unitarne oraz rzeczywiste macierze ortogonalne można zdiagonalizować przy pomocy macierzy unitarnej. Ponieważ wartości własne i wektory własne są na ogół zespolone, macierz diagonalizująca jest macierzą unitarną, nie zaś ortogonalną.

Przykład 10.4.8. Macierz obrotu jest rzeczywistą macierzą ortogonalną. W ogólności może być zdiagonalizowana przez zespoloną macierz unitarną.

Niech $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ ustalone.

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} \cos \alpha - t & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha - t & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t \end{vmatrix} = (1 - t)((\cos \alpha - t)^2 + \sin^2 \alpha) =$$

$$(1 - t)(1 - 2t \cos \alpha + t^2) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee 1 - 2t \cos \alpha + t^2 = 0$$

$$\Delta = 4 \cos^2 \alpha - 4 = 4t^2 \sin^2 \alpha, \quad t = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

$$e^{i\alpha} \quad e^{-i\alpha}$$

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \cos \alpha + i \sin \alpha, \lambda_3 = \cos \alpha - i \sin \alpha\}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha - 1 & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(\cos \alpha - 1) + y \sin \alpha = 0 \\ -x \sin \alpha + (\cos \alpha - 1)y = 0 \end{cases}$$

Jeśli $\cos \alpha = 1$, wówczas $\sin \alpha = 0$ oraz $A = I$ (postać diagonalna).

Założmy, że $\cos \alpha \neq 1$. Wówczas $\sin \alpha \neq 0$ oraz $y = -\frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha}x$.

$$\text{Stąd } x \sin \alpha + \frac{(\cos \alpha - 1)^2}{\sin \alpha}x = \frac{\sin^2 \alpha + (\cos \alpha - 1)^2}{\sin \alpha}x = \frac{2 \cos \alpha - 2}{\sin \alpha}x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

W konsekwencji $y = 0$, zaś $z \in \mathbb{C}$ dowolne. Wybieramy wektor własny $u = (0, 0, 1)$.

$$\lambda_2 = e^{i\alpha}$$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \sin \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -i \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos \alpha - i \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $x \sin \alpha + yi \sin \alpha = 0$. Jeśli $\sin \alpha = 0$, wówczas $\cos \alpha = \pm 1$ oraz A ma postać diagonalną.

Założmy, że $\sin \alpha \neq 0$. Wówczas $y = ix$ oraz $z = 0$. Wybieramy wektor własny $v = (1, i, 0)$.

$$\lambda_3 = e^{-i\alpha}$$

$$(A - \lambda_3 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \sin \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & i \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $x \sin \alpha - yi \sin \alpha = 0$. Jeśli $\sin \alpha = 0$, wówczas $\cos \alpha = \pm 1$ oraz A ma postać diagonalną.

Założmy, że $\sin \alpha \neq 0$. Wówczas $y = -ix$ oraz $z = 0$. Wybieramy wektor własny $w = (-1, i, 0)$.

Układ (u, v, w) jest bazą wektorów własnych. Normujemy wektory bazowe $\hat{u} = u, \hat{v} = \frac{v}{|v|} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}v, \hat{w} = \frac{w}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{2}}w$. Zauważmy, że układ $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ jest układem ortonormalnym.

Istotnie $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle = 0$ oraz $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = 1 \cdot (-1) + i \cdot \bar{i} = -1 + 1 = 0$.

$$\text{Macierz } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U(3), \text{ zatem } P^{-1} = P^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } D =$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & i & i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha + i \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}.$$

PODSUMOWANIE

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in V$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ oraz $A = [a_{ij}]$, $U \in M_n(K)$

$$K = \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{C}$$

Standard iloczyn skalarny
 $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

iloczyn hermitowski
 $\langle u, v \rangle = u_1 \overline{v_1} + \dots + u_n \overline{v_n}$ *stand*

transponowanie
 $A^T : [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$

sprzężenie hermitowskie
 $A^* : [a_{ij}]^* = [\overline{a_{ji}}]$

$$\det A^T = \det A$$

$$\det A^* = \overline{\det A}$$

macierz ortogonalna
 $UU^T = U^T U = I$
 $|\det U| = 1$

macierz unitarna
 $UU^* = U^* U = I$

$$|\det U| = 1$$

macierz symetryczna
 $A = A^T$

macierz hermitowska
 $A = A^*$

Macierz może nie mieć wartości własnych. Każda macierz ma n wartości własnych (licząc z krotnościami).

Macierz symetryczna ma
 n rzeczywistych wartości własnych.

Macierz hermitowska
ma n rzeczywistych wartości własnych.

$$U^* = (\overline{U})^T$$

$$\overline{\overline{u}} = u$$

10.5 Równoczesna diagonalizacja pary macierzy

W tym paragrafie zakładamy, że V jest skończenie wymiarową zespoloną przestrzenią liniową.

Definicja 10.5.1. i) Mówimy, że operatory liniowe $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ na n -wymiarowej przestrzeni liniowej V są równocześnie diagonalizowalne, jeśli istnieje taka baza przestrzeni V , w której macierze tych operatorów są równocześnie diagonalne.

ii) Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ są równocześnie diagonalizowalne, jeśli istnieje $P \in GL_n(\mathbb{C})$ taka, że macierze $P^{-1}AP$ oraz $P^{-1}BP$ są diagonalne.

Przykład 10.5.2. Rozważmy dwie macierze $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ postaci

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

W C

A jest diagonalizowalna, bowiem jej widmo jest proste $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i\}$.

B jest macierzą symetryczną o elementach rzeczywistych, jest więc diagonalizowalna. Możemy wyznaczyć $\text{Spec}(B) = \{\mu_1 = -\frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{3}{2}\}$.

Ponadto $E_{\lambda_1} = \text{lin}_{\mathbb{C}}\{(i, 1)\}$, $E_{\lambda_2} = \text{lin}_{\mathbb{C}}\{(-i, 1)\}$ oraz $E_{\mu_1} = \text{lin}_{\mathbb{C}}\{(-1, 1)\}$, $E_{\mu_2} = \text{lin}_{\mathbb{C}}\{(1, 1)\}$.

Zatem A i B nie są równocześnie diagonalizowalne, gdyż nie istnieje taka baza przestrzeni $\mathbb{C}^2$, która składałaby się z wektorów będących równocześnie wektorami własnymi A i B .

Zauważmy, że jeśli dwa operatory liniowe $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ są równocześnie diagonalizowalne w pewnej wspólnej bazie przestrzeni V , nie koniecznie ortonormalnej, to wówczas operatory te są ze sobą przemienne lub inaczej mówiąc komutują, tj. $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Istotnie, niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ będzie wspomnianą bazą (zbudowaną z wektorów własnych) oraz niech $v \in V, v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Wówczas istnieją $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takie, że $\varphi(b_i) = \lambda_i b_i$ oraz $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ takie, że $\psi(b_i) = \mu_i b_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Stąd

$$\varphi \circ \psi(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \psi(\varphi(b_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \psi(\lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\lambda_i \mu_i b_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi(\mu_i b_i) = \varphi \circ \psi(v).$$

Podobnie jeśli macierze $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ są równocześnie diagonalizowalne, to wówczas macierze A i B komutują, tj. $AB = BA$. Istotnie, ponieważ macierze diagonalne komutują, otrzymujemy

$$AB = (PP^{-1})A(PP^{-1})B(PP^{-1}) = P(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)P^{-1} = P(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)P^{-1} = BA.$$

Twierdzenie 10.5.3. Niech V będzie skończenie wymiarową zespoloną przestrzenią liniową.

- Jeśli dwa operatory liniowe $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ są ze sobą przemienne, to wówczas dla dowolnego $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ podprzestrzeń własna E_λ jest ψ -niezmiennicza i operatory φ, ψ mają wspólny wektor własny.
- Jeśli dwa diagonalizowalne operatory liniowe $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ są ze sobą przemienne, to są równocześnie diagonalizowalne.²⁸

Dowód. i) Niech $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ oraz $E_\lambda = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}$. Dla dowolnego $v \in E_\lambda$ mamy

$$\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \psi(\lambda v) = \lambda \psi(v).$$

Zatem jeśli $v \in E_\lambda$, to również $\psi(v) \in E_\lambda$, czyli E_λ jest ψ -niezmiennicza.

Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry, każdy operator liniowy na zespolonej przestrzeni

²⁸ Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej skończonej liczby komutujących diagonalizowalnych operatorów liniowych. Zauważmy, że twierdzenie 10.5.3 nie mówi, że dwa operatory liniowe, które są ze sobą przemienne są równocześnie diagonalizowalne. Mówi ono, że dwa diagonalizowalne operatory liniowe, które są ze sobą przemienne są równocześnie diagonalizowalne. Macierze $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

komutują, gdyż $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Jednakże ani A , ani B nie jest diagonalizowalna.

liniowej ma wektory własne. W szczególności $\psi|_{E_\lambda} \in \text{End}(E_\lambda)$ ma wektor własny $w \in E_\lambda$, tzn. istnieje $\mu \in \text{Spec}(\psi)$ takie, że $\psi(w) = \mu w$. Równocześnie $\varphi(w) = \lambda w$, zatem φ, ψ mają wspólny wektor własny. $\square$

Wniosek 10.5.4. Jeżeli dwie macierze hermitowskie (lub dwie macierze unitarne) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ komutują, to istnieje macierz $P \in U(n)$ oraz macierze diagonalne $D_A, D_B \in M_n(\mathbb{C})$ takie, że $P^{-1}AP = D_A$ oraz $P^{-1}BP = D_B$. ← są diagonalizowalne

Dowód. Macierze hermitowskie (unitarne) są macierzami normalnymi, a zatem są (unitarnie) diagonalizowalne. $\square$

Zauważmy, że w przypadku, gdy A, B są hermitowskie, macierze D_A, D_B są rzeczywiste.

Przykład 10.5.5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Są to rzeczywiste macierze symetryczne, zatem każda z nich jest ortogonalnie diagonalizowalna.

Ponieważ $AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = BA$, zatem istnieje (można tak wybrać) $P \in O(3)$ taka, że macierze $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ są diagonalne. AB = BA ✓ ?

1) Znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy A .

$$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2 + t = t^2(2-t)$$

$\text{Spec}(A) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0\}$, krotności algebraiczne $k_1 = 1, k_2 = 2$

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0, -x + z = 0$$

Podprzestrzeń własna to $E_{\lambda_1}^A = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, 1)\}$

Wybieramy wektor własny $c_1 = (1, 0, 1)$ i normujemy go $c'_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + z = 0, y - \text{dowolne}$$

Podprzestrzeń własna to $E_{\lambda_2}^A = \{(x, y, -x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ c2 o c3 = 0

Wybieramy wektory własne $c_2 = (1, 0, -1), c_3 = (0, 1, 0)$ i normujemy je $c'_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), c'_3 = c_3$.

Macierz, której kolumnami są wersory z bazy ortonormalnej $\mathcal{C}' = (c'_1, c'_2, c'_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ diagonalizuje macierz A . Nie koniecznie jednak diagonalizuje macierz B .

Znajdujemy wartości własne i wektory własne macierzy B .

$$\chi_B(t) = \det(B - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ 1 & -t & -1 \\ 1 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = (4-t)(t^2 - 2t - 2)$$

$\text{Spec}(B) = \{\mu_1 = 4, \mu_2 = 1 - \sqrt{3}, \mu_3 = 1 + \sqrt{3}\}$, krotności algebraiczne $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ (widmo proste)

Wyberzemy teraz wektory własne macierzy B spośród wektorów własnych macierzy A . Wiemy że dla dowolnego $v \in E_{\lambda_1}^A$ istnieje $\mu \in \mathbb{R}$ takie, że $Bv^T = \mu v^T$. W szczególności dla c'_1 mamy

$$B(c'_1)^T = B \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 4(c'_1)^T.$$

Zatem c'_1 jest wektorem własnym ψ odpowiadającym wartości własnej $\mu_1 = 4$.

Niech u, w to dwa wektory własne ψ odpowiadające μ_2, μ_3 . Wiemy, że $u, w \in E_{\lambda_2}^A$. Są zatem kombinacjami liniowymi postaci $ac'_2 + bc'_3 = (\frac{a}{\sqrt{2}}, b, -\frac{a}{\sqrt{2}})$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

Dla $\mu_2 = 1 - \sqrt{3}$ otrzymujemy $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -2x \\ x - 2y \end{bmatrix} = (1 - \sqrt{3}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x \end{bmatrix}$, skąd $y = (1 + \sqrt{3})x$.

Zatem $E_{\mu_2}^B = \{(x, (1 + \sqrt{3})x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 1 + \sqrt{3}, -1)\}$. Wybieramy wektor własny $d_2 = (1, 1 + \sqrt{3}, -1)$ i przyjmujemy $d'_2 = \frac{d_2}{\|d_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}(1, 1 + \sqrt{3}, -1)$.

Dla $\mu_3 = 1 + \sqrt{3}$ otrzymujemy $B \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -2x \\ x - 2y \end{bmatrix} = (1 + \sqrt{3}) \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x \end{bmatrix}$, skąd $y = (1 - \sqrt{3})x$.

Zatem $E_{\mu_3}^B = \{(x, (1 - \sqrt{3})x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{(1, 1 - \sqrt{3}, -1)\}$. Wybieramy wektor własny $d_3 = (1, 1 - \sqrt{3}, -1)$ i przyjmujemy $d'_3 = \frac{d_3}{\|d_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}(1, 1 - \sqrt{3}, -1)$.

Stąd $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} & \frac{-1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \end{bmatrix}$. Otrzymujemy $P^{-1}BP = P^TBP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

oraz $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.