

Twierdzenie 1.3.17. i) Każdą permutację $\sigma \in S_n$, dla $n > 1$ można przedstawić jako złożenie pewnej liczby transpozycji.

ii) Każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji liczb sąsiednich.

Dowód. i) Każda permutacja rozkłada się na iloczyn rozłącznych cykli. Każdy cykl $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ rozkłada się na iloczyn transpozycji w sposób następujący ⁷

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \dots (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

nie-
nowy cykl

ii) Niech $i < j$. Dla transpozycji (i, j) otrzymujemy następujący rozkład

$$(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1) \dots (i+1, i+2)(i, i+1).$$

W rozkładzie tym występuje $2(j-1) - 1$ czynników. $\square$

STOP

Uwaga 1.3.18. Rozkład permutacji na iloczyn transpozycji nie jest jednoznaczny.

Przykład 1.3.19. Rozważmy permutację $\sigma \in S_5$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Dokonamy rozkładu σ na iloczyn transpozycji. Otrzymujemy

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2)$$

Dla dowolnych $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mamy $\boxed{(j, k)(j, k) = \text{id,}}$ stąd

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5) = (1, 5)(2, 3)(2, 3)(1, 4)(1, 3)(1, 2) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(3, 5)(2, 4)(2, 4)(3, 5)(1, 2).$$

Definicja 1.3.20. i) Niech $\sigma \in S_n$. Mówimy, że liczby $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tworzą inwersję ⁸ w permutacji σ , jeśli $j < k$ oraz $\sigma(j) > \sigma(k)$.

ii) Permutację σ nazywamy *parzystą*, jeśli $\sigma \in S_1$ lub przy $n > 1$ liczba inwersji w permutacji σ jest parzysta.

iii) Permutację σ nazywamy *nieparzystą*, jeśli liczba inwersji w permutacji σ jest nieparzysta.

iv) Liczbę $(-1)^l$, gdzie l to liczba inwersji permutacji σ , nazywamy *znakiem permutacji* i oznaczamy symbolem $\text{sgn}(\sigma)$.

Liczba inwersji dla permutacji identycznościowej to 0.

Zatem $\boxed{\text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}}$. Permutacja σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy gdy $\text{sgn}(\sigma) = 1$.

Podobnie, permutacja σ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy gdy $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

⁷Wzór ten można uzasadnić indukcyjnie.

⁸Niektórzy autorzy używają określenia *nieporządek*.

$$i=1 < j=3 \quad \sigma(i)=3 > \sigma(j)=1$$

Przykład 1.3.21. Rozważmy permutację $\sigma \in S_6$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & 4 & 5 & 6 \\ \underline{3} & 4 & \underline{1} & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Wygodny jest następujący zapis, służący zliczaniu inwersji.

							liczba inwersji
3	4	<u>1</u>	5	6	<u>2</u>		2
	4	<u>1</u>	5	6	<u>2</u>		2
		1	5	6	<u>2</u>		0
			5	6	<u>2</u>		1
				6	<u>2</u>		1
					2		6

Mamy sześć inwersji, zatem $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$ i permutacja σ jest parzysta.

Związek parzystości permutacji z rozkładem na iloczyn transpozycji

Twierdzenie 1.3.22. i) Permutacje σ oraz $\sigma(j, k)$ różnią się znakiem. Podobnie permutacje σ oraz $(j, k)\sigma$ różnią się znakiem.

ii) Iloczyn k transpozycji jest permutacją, której znak jest równy $(-1)^k$.

iii) Przy dowolnym rozkładzie permutacji σ na iloczyn transpozycji parzystość liczby czynników jest zawsze taka sama i zgodna z parzystością permutacji σ .

Wniosek 1.3.23. i) Permutacja σ jest parzysta (nieparzysta) wtedy i tylko wtedy gdy jest iloczynem parzystej (nieparzystej) liczby transpozycji.

ii) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, dowolnych $\sigma, \tau \in S_n$

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma).$$

Przykład 1.3.24. Rozważmy permutację $\sigma \in S_6$ postaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Otrzymujemy następujący rozkład na cztery transpozycje.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3)(2, 4, 5, 6) = (1, 3)(2, 6)(2, 5)(2, 4)$$

Permutacja σ jest parzysta.

1.3.3 Pierścienie i ciała

Definicja 1.3.25. Zespół $(A, \circ, *)$ złożony z niepustego zbioru A i określonych w nim działań wewnętrznych $\circ : A \times A \rightarrow A$, $* : A \times A \rightarrow A$ nazywamy *pierścieniem*, jeśli $(A, \circ)$ jest grupą abelową, zaś działanie $*$ jest łączne oraz rozdzielne względem działania $\circ$, tzn.

RING

$(R, +, \cdot)$

$$\forall a, b, c \in A \quad (a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c) \wedge c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b).$$

$$(a+b) \cdot c = ac + bc$$

$$c \cdot (a+b) = ca + cb$$

Pierścień, w którym działanie $*$ posiada element neutralny, nazywamy *pierścieniem z jedyneką* lub *z jednością*. Pierścień, w którym działanie $*$ jest przemienne, nazywamy *pierścieniem przemennym* lub *komutatywnym*.

Notacja addytywna		Notacja multiplikatywna	
$\circ / +$	dodawanie	$* / \cdot$	mnożenie
$a + b$	suma	$a \cdot b$	iloczyn
$e = 0$	zero	$e = 1$	jedynka
$a' = -a$	element przeciwny	$a' = a^{-1}$	element odwrotny

$$na = \underbrace{a + \dots + a}_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$0 \cdot a = 0$$

$$m \in \mathbb{Z}, m < 0 \quad ma = \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_m$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$$

$$a^0 = e = e = 1$$

$$a^m = \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_n$$

Używając powyższej notacji, piszemy po prostu $(A, +, \cdot)$.

Definicja 1.3.26. Niech K będzie zbiorem zawierającym co najmniej dwa elementy. Pierścień przemienny z jedyneką $(K, \circ, *)$ nazywamy *ciałem*, jeśli ⁹

$$\forall a \in K \setminus \{0\} \quad \exists a' \in K \quad a * a' = 1.$$

FIELD

Uwaga 1.3.27.

- i) $(K, \circ, *)$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $(K, \circ)$ jest grupą abelową (z elementem neutralnym $e_\circ$ nazywanym *zerem* i oznaczanym jako 0) oraz $(K \setminus \{0\}, *)$ jest grupą abelową i ponadto działanie $*$ jest rozdzielne względem działania $\circ$.^{10 11}

⁹Ciało to pierścień przemienny z jedyneką (różną od zera, tj. $1 = e_* \neq e_\circ = 0$), w którym wszystkie niezerowe (tj. różne od elementu neutralnego $e_\circ$) elementy są odwracalne. Każde ciało zawiera zatem co najmniej dwa elementy, mianowicie 0 i 1. Zbiór elementów niezerowych jest niepusty i tworzy grupę z mnożeniem.

¹⁰Warunek rozdzielności mnożenia względem dodawania pozwala rozróżniać działania mnożenia i dodawania. Stąd zamiast pisać $(a \cdot b) + c$ piszemy $a \cdot b + c$. Oznacza to, że mnożenie wiąże argumenty silniej niż dodawanie.

¹¹Implikacja z lewa na prawo jest oczywista. By dowieść implikacji w przeciwnym kierunku wystarczy zaobserwować, że $a * 0 = 0 * a = 0$ dla dowolnego $a \in K$. Równość ta wynika z własności rozdzielności mnożenia względem dodawania, mianowicie $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, skąd $a \cdot 0 = 0$. Analogicznie dowodzimy, że $0 \cdot a = 0$. Z przemienności i łączności działania $*$ w zbiorze $K \setminus \{0\}$ oraz z równości $a * 0 = 0 * a = 0$ wynika przemienność i łączność działania $*$ w zbiorze K .

ii) Jeśli $(K, \circ, *)$ jest ciałem, to wówczas grupę $(K, \circ)$ nazywamy *grupą addytywną* ciała K , zaś grupę $(K \setminus \{0\}, *)$ nazywamy *grupą multiplikatywną* ciała K .

iii) W ciele można zdefiniować operację *dzielenia* w sposób następujący

$$\frac{a}{b} := a * b^{-1}, \quad a, b \in K, b \neq 0.$$

Przykład 1.3.28. i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych

$(\mathbb{R}, +)$ grupa addytywna ciała

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupa multiplikatywna ciała

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych

iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedyneką, ale nie ciało (bowiem np. $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

iv) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów ma strukturę pierścienia przemiennego jedyneką.

v) $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia funkcji ma strukturę ciała.

vi) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +_p, \cdot_p)$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$
 $+_p, \cdot_p$ dodawanie i mnożenie modulo p

Jeśli p to liczba pierwsza, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem ¹² (tzw. *ciało reszt modulo p*). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest pierścieniem, ale nie ciałem.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to ciało	$+_5$	0	1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4
	1	1	2	3	4	0
	2	2	3	4	0	1
	3	3	4	0	1	2
	4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$6 \bmod 5 = 1$$

Zauważmy, że w ciele $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zachodzi równość $5 \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{5 \text{ razy}} = 0$.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nie jest ciałem pierścieniem	$+_4$	0	1	2	3
	0	0	1	2	3
	1	1	2	3	0
	2	2	3	0	1
	3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$4 \bmod 4 = 0$$

¹²Jest to przykład ciała o skończonej liczbie elementów. Tego typu ciała nazywamy *ciałami skończonymi* lub inaczej *ciałami Galois*.

Definicja 1.3.29. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Elementy $a, b \in A, a \neq 0, b \neq 0$ nazywamy dzielnikami zera, jeśli $a \cdot b = 0$.

Uwaga 1.3.30. W ciele nie ma dzielników zera.

Dowód. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem oraz niech $a, b \in K$. Załóżmy, że $a \cdot b = 0$ oraz $a \neq 0$. Jeśli $a \neq 0$, to istnieje $a^{-1} \in K$. Otrzymujemy

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Zatem $b = 0$. $\square$

Definicja 1.3.31. Niech $(K, +, \cdot)$ będzie ciałem. Niech 1 oznacza element neutralny mnożenia, zaś 0 element neutralny dodawania w ciele. Najmniejszą liczbę naturalną n taką, że

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ razy}} = 0,$$

nazywamy *charakterystyką ciała* K i oznaczamy symbolem $\text{char}(K)$. Jeśli taka liczba naturalna nie istnieje, mówimy, że ciało K jest *charakterystyki zero*.

Można wykazać, że charakterystyka dowolnego ciała albo jest równa zero albo jest *liczbą pierwszą* p . Ciała $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}(X)$ są ciałami charakterystyki zero, zaś $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem charakterystyki dodatniej, mianowicie $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$. Każde ciało o skończonej liczbie elementów jest ciałem charakterystyki dodatniej. Ciała o nieskończonej liczbie elementów mogą mieć tak charakterystykę dodatnią jak i równą zero. Przykładem ciała o nieskończonej liczbie elementów, którego charakterystyka jest dodatnia, jest ciało funkcji wymiernych o współczynnikach z ciała $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Przykład 1.3.32. Sprawdź, że zbiór $\mathbb{R}^2$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia zdefiniowanymi poniżej ma strukturę ciała.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$(\mathbb{C}, +)$ jest grupą abelową.

Działanie $+$ jest wewnętrzne, łączne, przemienne. Elementem neutralnym jest $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, zaś elementem przeciwnym do $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ jest $(-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ jest grupą abelową.

Działanie $\cdot$ jest wewnętrzne.

przemienność:

$$(x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$$

łączność: $L = P$

$$\begin{aligned} L &= (a, b) \cdot [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = \\ &= (ax_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2 - bx_2y_1, ax_1y_2 + ax_2y_1 + bx_1x_2 - by_1y_2) \\ P &= [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] \cdot (x_2, y_2) = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) \cdot (x_2, y_2) = \\ &= (ax_1x_2 - by_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2, ax_1y_1 - by_1y_2 + ay_1x_2 + bx_1x_2) \end{aligned}$$

el. neutralny: $e = (1, 0)$

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1, 0) \cdot (x_1, y_1) = (1 \cdot x_1 - 0 \cdot y_1, 1 \cdot y_1 + 0 \cdot x_1) = (x_1, y_1)$$

el. odwrotny do $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$:

$$(x_1, y_1) \cdot (a, b) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall (x_1, y_1) \neq (0, 0) \quad a = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad b = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$, bowiem $L = P$.

$$L = (a, b) \cdot [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = (a, b) \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (ax_1 + ax_2 - by_1 - by_2, ay_1 + ay_2 + bx_1 + bx_2)$$

$$P = [(a, b) \cdot (x_1, y_1)] + [(a, b) \cdot (x_2, y_2)] = (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1) + (ax_2 - by_2, ay_2 + bx_2)$$

Definicja 1.3.33. Zdefiniowane powyżej ciało nazywamy ciałem liczb zespolonych i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Elementy tego ciała nazywamy liczbami zespolonymi.

TEMAT: *Liczby zespolone*

2.1 Ciała liczb zespolonych

Motywacja

$$\mathbb{N} \xrightarrow{n \mapsto n} \mathbb{Z} \xrightarrow{n \mapsto \frac{n}{1}} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x \mapsto (x,0)]{h} \mathbb{C}$$

$X^2 - 2 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{Q}$, jego rozwiązania $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Ćwiczenie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem takim, że $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}$

$X^2 + 1 = 0$ równanie o współczynnikach z $\mathbb{R}$, jego rozwiązania $\pm i$ nie należą do $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ciało algebraicznie domknięte - tzn. rozwiązania równań algebraicznych (wielomianowych) o współczynnikach z $\mathbb{C}$ należą do $\mathbb{C}$

Zanurzenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas $(\Omega, +, \cdot)$ jest ciałem.

wewnętrzność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \Omega$, $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) \in \Omega$

przemienność: $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = (x_2, 0) + (x_1, 0)$
 $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0) = (x_2 x_1, 0) = (x_2, 0) \cdot (x_1, 0)$

łączność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] + (x_3, 0) = (x_1 + x_2 + x_3, 0) = (x_1, 0) + [(x_2, 0) + (x_3, 0)]$
 $[(x_1, 0) \cdot (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 x_2 x_3, 0) = (x_1, 0) \cdot [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

el. neutralne: $(0, 0)$ dla dodawania oraz $(1, 0)$ dla mnożenia

el. symetryczne do $(x_1, 0)$: $(-x_1, 0)$ względem $+$, $(\frac{1}{x_1}, 0)$ względem $\cdot$

rozdzielność: $[(x_1, 0) + (x_2, 0)] \cdot (x_3, 0) = (x_1 + x_2, 0) \cdot (x_3, 0) = ((x_1 + x_2)x_3, 0) =$
 $= (x_1 x_3 + x_2 x_3, 0) = [(x_1, 0) \cdot (x_3, 0)] + [(x_2, 0) \cdot (x_3, 0)]$

Niech $h : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, $h(x) = (x, 0)$. Jest to zanurzenie, czyli bijekcja taka, że

$h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ oraz $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2)$.

Utożsamiamy zbiory $\mathbb{R}$ oraz Ω i piszemy x zamiast $h(x)$.

zgodne z działaniami

Zdefiniujemy $i := (0, 1)$ tzw. *jednostka urojona*. Wówczas

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$\mathbb{C} \ni z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

Postać $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ to tzw. *postać kanoniczna (algebraiczna, Gaussa)* liczby zespolonej. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\text{Re} z$. Liczbę $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\text{Im} z$. Liczby postaci iy , $y \in \mathbb{R}$ nazywamy *czysto urojonymi*.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\text{Re} z_1 = \text{Re} z_2 \wedge \text{Im} z_1 = \text{Im} z_2)$$

Postać algebraiczna pozwala na dodawanie i mnożenie liczb zespolonych jak wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Przykład 2.1.1. $(2 + 7i) - (4 - 2i) = -2 + 9i$

$$(3 - i) \cdot (2 + 3i) = 6 + 9i - 2i - 3i^2 = 9 + 7i$$

$$\frac{2+3i}{2-5i} = \frac{(2+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+6i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-11+16i}{29} = -\frac{11}{29} + \frac{16}{29}i$$

$$(x - iy)(x + iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

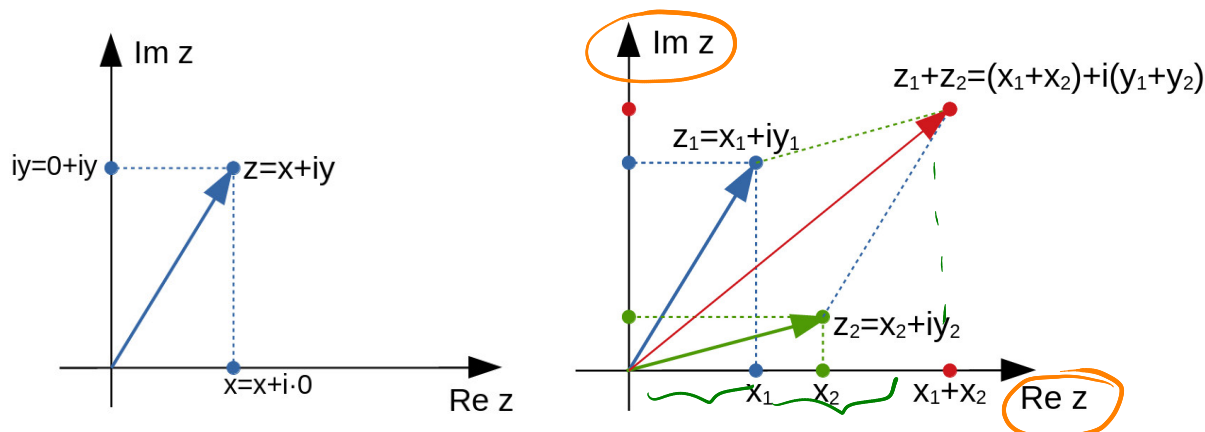
$$x, y \in \mathbb{R}$$

Uwaga 2.1.2. W ciele $\mathbb{C}$ nie można określić porządku liniowego.

$$-1 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) \quad 1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

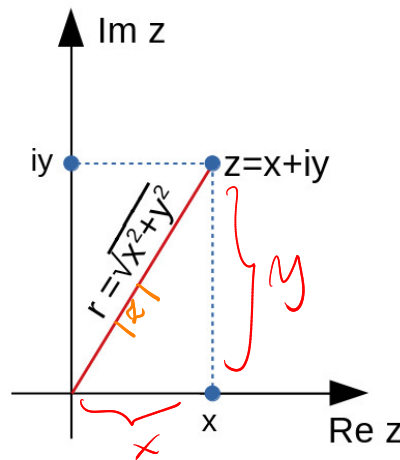
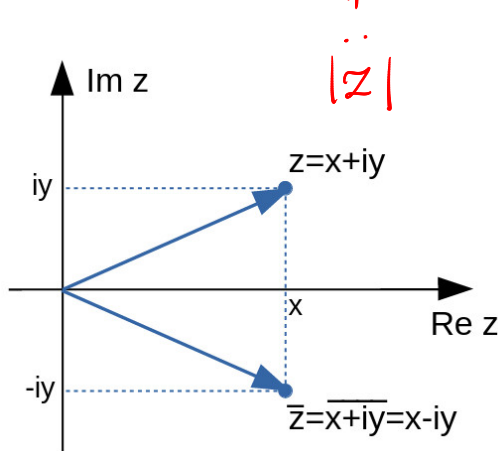
Utożsamiamy liczby zespolone z punktami na płaszczyźnie lub wektorami zaczepionymi w $(0, 0)$.

Płaszczyzna zespolona - geometryczny model ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$



Definicja 2.1.3. Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- i) Liczbę zespoloną $w = x - iy$ nazywamy *liczbą sprzężoną* do liczby z . Oznaczamy ją $\bar{z}$.
 ii) Liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy *modułem* liczby z . Oznaczamy ją $|z|$.

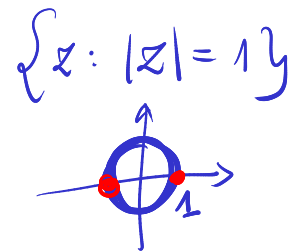


$|z|$ magnitude

$\mathbb{R}$
 $x \in \mathbb{R}$
 $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
 $\mathbb{C} \quad |z| \neq \pm z$

Twierdzenie 2.1.4 (Własności liczb zespolonych). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$
 ii) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
 iii) $\overline{(\bar{z})} = z$
 iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 iv) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, dla $z_2 \neq 0$
 vi) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
 vii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
 viii) $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
 ix) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
 x) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta) $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$



Dowód. vii) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

viii) $\operatorname{Re} z = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

x) $1 = \operatorname{Re} 1 = \operatorname{Re} \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} \right) \stackrel{i)}{=} \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) \stackrel{\text{def}}{\leq} \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| \stackrel{iv) v)}{=} \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \Rightarrow$
 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \wedge |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$

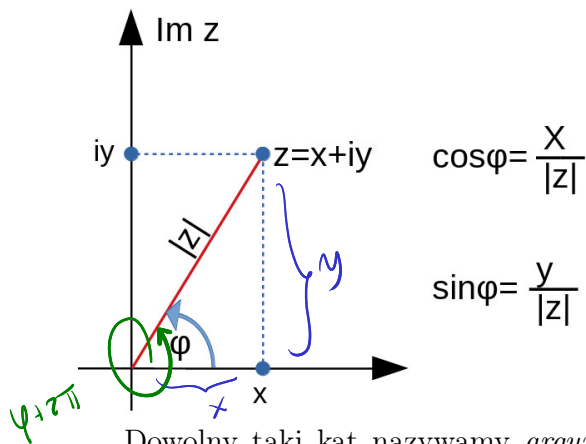
□

2.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy \neq 0$. Wówczas $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$. Ponieważ $\left(\frac{x}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{y}{|z|} \right)^2 = 1$, więc istnieje kąt φ taki, że

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Dowolny taki kąt nazywamy *argumentem* liczby z . Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$, nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $\arg z$. Zatem dowolny argument liczby z ma postać $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Przyjmujemy, że argument liczby $z = 0$ jest nieokreślony. Dowolną liczbę $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ możemy zatem przedstawić w postaci $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie φ to jeden z jej argumentów. Powyższe przedstawienie nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z .

Gdy $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$, to wówczas $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\beta = \alpha + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2.2.1. Przedstaw podane liczby w postaci trygonometrycznej.

$$z = 7$$

$$z = 7(1 + 0i)$$

$$z = -i$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$z = 1(0 + (-1) \cdot i)$$

$$z = -\sqrt{27} - 3i$$

$$|z| = \sqrt{27 + 9} = 6$$

$$z = 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg z = \frac{3}{2}\pi \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg z = \frac{7}{6}\pi$$

$$-i = 1(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$$

$$-\sqrt{27} - 3i = 6(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$$

$$z = 7(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$7(1 + 0 \cdot i) = 7$$

$$|z| \arg(z)$$

$$\Delta \left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) \right)$$

$$27 = 9 \cdot 3$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$z = -3\sqrt{3} - 3i$$

III kwadrant

(wzory redukcyjne!)

UWAGA

$$\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{< 0}$$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 2.2.2. Niech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Wówczas:

- i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$,
- ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$,
- iii) $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ tzw. wzór de Moivre'a

Dowód. i) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$
 $= |z_1| \cdot |z_2| \left(\underbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}_{\cos(\alpha + \beta)} + i \underbrace{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}_{\sin(\alpha + \beta)} \right)$

ii) analogicznie

iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $z^2 = z \cdot z = |z|^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.

Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę. $\square$

Przykład 2.2.3. Przedstaw liczbę $z = -\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$ w postaci trygonometrycznej.

METODA I: Ponieważ $|z| = 1$, zatem $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ dla pewnego $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\sin \frac{\pi}{10} < 0 \\ \sin \varphi = \cos \frac{\pi}{10} > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi \text{ z II ćwiartki}$$

Na mocy wzorów redukcyjnych $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ oraz $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

METODA II: $z = -\sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = i^2 \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = i(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}) =$
 $(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

Przykład 2.2.4. Oblicz $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

$$\begin{aligned} 1+i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) & 1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} &= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right) & & \\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} &= 2^{10}\left(\cos\left(\frac{140}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{140}{12}\pi\right)\right) = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{35}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{35}{3}\pi\right)\right) = & & \\ &= 2^{10}\left(\cos\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{10}\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = & & \\ &= 2^9(1 - \sqrt{3}i) & & \end{aligned}$$

Twierdzenie 2.2.5 (Własności argumentu). Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

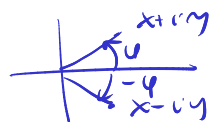
Wówczas prawdziwe są następujące równości.

- i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0$ lub $k = -1$)

ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0$ lub $k = -1$)

iii) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

iv) $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$

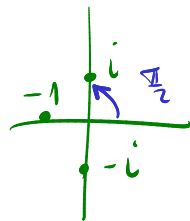


$-\varphi$ $2\pi - \varphi$

Dowód. iii) Na mocy i) dla $n = 2$ mamy $\arg(z^2) = \arg(z \cdot z) = \arg z + \arg z + 2k\pi = 2\arg z + 2k\pi$.

Przeprowadzając dowód indukcyjny, otrzymujemy tezę.

iv) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ oraz $0 = \arg(|z|^2) = \arg z + \arg \bar{z} + 2k\pi$, skąd $\arg \bar{z} = -2\pi - \arg z$ $\square$



Przykład 2.2.6. $\arg i = \frac{\pi}{2}$ $\arg(-1) = \pi$ $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$

$i = (-1) \cdot (-i) \Rightarrow \arg i = \pi + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, tj. $k = -1$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Zatem dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci $z = |z|e^{i\varphi}$, gdzie φ to pewien argument liczby z .

Przykład 2.2.7. a) $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 \cdot i = i$

b) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

najpiękniejszy wzór w matematyce

Twierdzenie 2.2.8. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:

i) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$, $e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$,

ii) $(e^{i\alpha})^k = e^{ik\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $e^{i(\alpha+2k\pi)} = e^{i\alpha}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iv) $e^{i\alpha} \neq 0$, $|e^{i\alpha}| = 1$.

to samo w tw. 2.2.2.

Dowód. i), ii), iii) Analogiczny jak dla własności działań na liczbach w postaci trygonometrycznej.

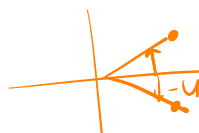
iv) Mamy $|e^{i\alpha}| = |\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$, zatem $e^{i\alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = 0$, co nie jest możliwe, gdyż gdy $\cos \alpha = 0$, to $\sin \alpha = \pm 1$. $\square$

Wniosek 2.2.9. Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2 e^{i\beta}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Wówczas:

i) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)}$,

ii) $z^k = r^k e^{ik\varphi}$, dla $k \in \mathbb{Z}$,

iii) $\bar{z} = r e^{-i\varphi}$.



Dowód. iii) Jeśli $\arg z = \varphi$, to $\arg \bar{z} = 2\pi - \varphi$, skąd $e^{(2\pi i - \varphi)i} = e^{2\pi i} e^{-\varphi i} = e^{-\varphi i}$. $\square$

Wzory Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

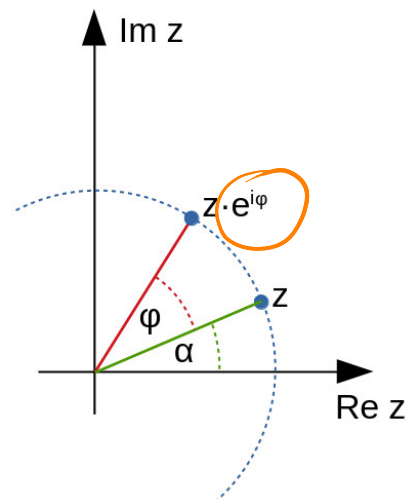
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ

$$z = re^{i\alpha}$$

$$z \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$$

$$|z| = |z \cdot e^{i\varphi}| = |z| \cdot 1 = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$



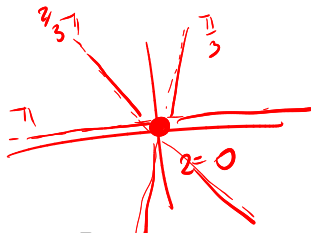
Przykład 2.2.10. Rozwiąż równanie $z^3 = (\bar{z})^3$.

Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.

Założmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^3 &= (\bar{z})^3 \\ r^3 e^{3i\varphi} &= r^3 e^{-3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 \\ 6\varphi &= 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$z = 0$ jedno rozwiązanie
 $\frac{6\pi}{3} = 2\pi$



Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.

2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy *pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby w* .

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.