

Wzory Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Dodając lub odejmując stronami, otrzymujemy :

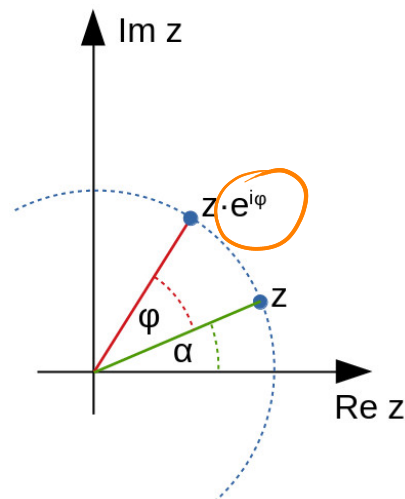
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Obrót o kąt φ

$$z = re^{i\alpha}$$

$$z \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\alpha+\varphi)}$$

$$|z| = |z \cdot e^{i\varphi}| = |z| \cdot 1 = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$



Przykład 2.2.10. Rozwiąż równanie $z^3 = (\bar{z})^3$.

Widzimy, że $z = 0$ spełnia równanie.

Założmy teraz, że $z \neq 0$. Wówczas $z = re^{i\varphi}$, dla pewnych $r \in \mathbb{R}, r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^3 &= (\bar{z})^3 \\ r^3 e^{3i\varphi} &= r^3 e^{-3i\varphi} \\ e^{6i\varphi} &= 1 = e^0 \\ 6\varphi &= 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$z=0$ jedno rozwiązanie

$$\frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

Rozwiązaniami są punkt $z = 0$ oraz półproste $\varphi_k = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Podsumowując, rozwiązaniami są punkty należące do prostych $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ oraz $y = -\sqrt{3}x$.

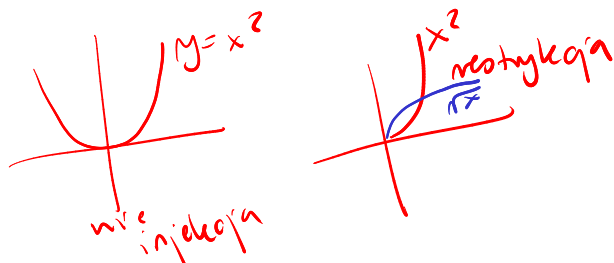
2.3 Pierwiastkowanie, równania wielomianowe

Pierwiastkowanie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ będą ustalone.

Definicja 2.3.1. Każdą liczbę $z \in \mathbb{C}$ spełniającą równanie $z^n = w$, nazywamy pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby w .

Przykład 2.3.2. Rozwiąż równanie $z^2 = 8 + 6i$.



$$\begin{aligned} \mathbb{R} & & \mathbb{C} \\ x^4 &= 1 & z^4 &= 1 \\ x &= \pm 1 & 1, -1, i, -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} & & \mathbb{C} \\ \sqrt[4]{1} &= 1 & ? \end{aligned}$$

$$z^2 = 8 + 6i$$

→ dla wybranych przykładów

I sposób:
postać algebraiczna

$$z = x + iy, w = 8 + 6i$$

$$z^2 = w$$

$$(x + iy)^2 = 8 + 6i$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 8 + 6i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

$$y \neq 0 \text{ (gdy } y = 0, \text{ to } z = x, x^2 \neq 8 + 6i)$$

$$x = \frac{3}{y}, \frac{9}{y^2} - y^2 = 8$$

$$y^4 + 8y^2 - 9 = 0, \Delta = 100$$

$$y^2 = 1, y = \pm 1$$

$$z = 3 + i \vee z = -3 - i$$

$$z_1 \quad z_2 = -z_1$$

II sposób:
postać wykładnicza

$$z = |z|e^{i\varphi}, w = 8 + 6i$$

$$|z|^2 e^{2i\varphi} = w = |w|e^{i\alpha}$$

$$|w| = 10$$

$$w = 8 + 6i = 10\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} = 10e^{i\alpha}$$

$$2\varphi = \alpha + 2k\pi, |z| = \sqrt{10}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + k\pi$$

$$z = \sqrt{10}e^{i\varphi_k}, k \in \{0, 1\}$$

III sposób:
postać algebraiczna

$$8 + 6i = \frac{9}{3} + 6i - \frac{1}{3} =$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 =$$

$$= (3 + i)^2 = z^2$$

$$z = 3 + i \vee z = -3 - i$$

Twierdzenie 2.3.3. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, to wówczas równanie $z^n = w$ posiada n różnych rozwiązań. Rozwiązania te mają postać

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dowód. Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, wówczas

$$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \cdot \text{Otrzymu-}$$

jemy $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $\alpha_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$.
Symbolem $\sqrt[n]{w}$ oznaczamy zbiór wszystkich rozwiązań równania. Zatem

UWAGA
symbol
zbioru

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Przykład 2.3.4. Rozwiąż równanie $z^5 = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Niech $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ oraz $w = \sqrt{8} - i\sqrt{24}$.

Obliczamy $|w| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, skąd $w = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Zatem

$$z^5 = w \Leftrightarrow \rho^5(\cos 5\alpha + i \sin 5\alpha) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5 \\ 5\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Stąd $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha_k = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi$ oraz $z_k = \sqrt{2}(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Liczby $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = w$ stanowią wierzchołki n -kąta foremnego, wpisanego w koło o środku $z = 0$ i promieniu $\sqrt[n]{r}$.

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

$$w = |w|e^{i\varphi}$$

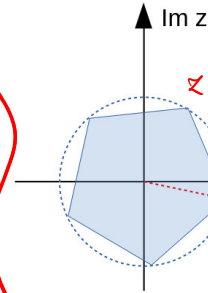
$$z \cdot w = |z| \cdot |w| e^{i(\varphi + \varphi)}$$

$$+ \text{ten sam}$$

$$|z_0| = |z_1| = \dots$$

$$\frac{2\pi}{n}$$

$$|e^{\frac{2\pi i}{5}}| = 1$$



$k=0$ to samo
 $k=5$ to samo

$k=1$ to samo
 $k=6$ to samo

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi i}{15}}$$

$$z_1 = z_0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

Przykład 2.3.5. Rozwiąż równanie $z^4 = (\sqrt{3} - i)^{12}$

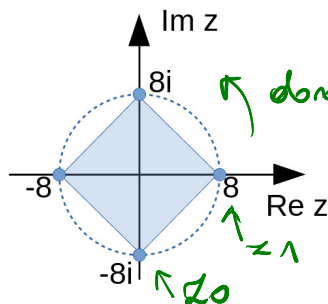
Równanie ma 4 rozwiązania z_0, z_1, z_2, z_3 . Będą one wierzchołkami kwadratu.

$$z^4 = ((\sqrt{3} - i)^3)^4 \quad (a-b)^3$$

$$\text{Niech } z_0 = (\sqrt{3} - i)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i.$$

Kolejne wierzchołki kwadratu otrzymujemy przez obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$, co odpowiada mnożeniu przez $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z_1 = z_0 \cdot i = 8, \quad z_2 = z_1 \cdot i = 8i, \quad z_3 = z_2 \cdot i = -8$$



obrót o $\frac{\pi}{2}$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_1 = z_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_1 = z_0 \cdot i = (-8i) \cdot i = -8i^2 = 8$$

Uwaga 2.3.6. Rozwiązywanie równań w $\mathbb{R}$ i w $\mathbb{C}$

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \{-3, 3\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -i, i\}$
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt{z^2} = \{-z, z\}$ <i>zbiór</i>

Równania wielomianowe

Rozważmy wielomian zmiennej zespolonej z stopnia n .

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, \quad c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \quad c_n \neq 0$$

$$z^n = W$$

$$1 \cdot z^n - W = 0$$

Definicja 2.3.7. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *pierwiastkiem wielomianu* W , jeżeli $W(z_0) = 0$.

Twierdzenie 2.3.8 (Bézout). Liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$.

Dowód. Dzieląc przez dwumian $z - z_0$, otrzymujemy $W(z) = (z - z_0)P(z) + \text{const.}$ Stąd $W(z_0) = 0 \Leftrightarrow W(z) = (z - z_0)P(z)$. $\square$

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.3.9. Liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W , jeżeli istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)^k P(z)$ oraz $P(z_0) \neq 0$.

Przykład 2.3.10. Niech $W(z) = z^3 - z^2 - z + 1$. Faktoryzując, otrzymujemy $W(z) = z^2(z - 1) - (z - 1) = (z - 1)(z^2 - 1) = (z - 1)^2(z + 1)$.
Zatem $z = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Twierdzenie 2.3.11 (Zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek w $\mathbb{C}$.

Wniosek 2.3.12. Każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n pierwiastków w $\mathbb{C}$, licząc z krotnościami.

Dowód. Niech W będzie wielomianem stopnia n oraz niech $z_1, z_2, \dots, z_m$ to jego wszystkie pierwiastki o krotnościach $k_1, k_2, \dots, k_m$, odpowiednio. Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout otrzymujemy $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ oraz

$$W(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}. \quad \square$$

Trójkwadratowy $az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

Obliczamy $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ oraz $\sqrt{\Delta} = \{-\delta, \delta\}$.

Gdy $\Delta \neq 0$, otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 2.3.13. Rozwiąż równanie $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

Obliczamy $\Delta = 4i^2 - 12 = -16 = 16i^2, \sqrt{\Delta} = \{-4i, 4i\}$.

Niech $\delta = 4i$, wówczas $z_1 = -3i$ oraz $z_2 = i$.

Wielomiany zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych

Niech $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 2.3.14. Niech W będzie wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Udowodnimy twierdzenie dla pierwiastków jednokrotnych. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie takie, że $W(z_0) = 0$. Wówczas

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0.$$

Ponieważ $\overline{a_k} = a_k$, zatem $W(\bar{z}_0) = a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0. \quad \square$

$$a_n \in \mathbb{R} \quad \overline{a_n} = a_n$$

$$\overline{W(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = W(\bar{z})$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \overline{\alpha} = \alpha$$

$$\overline{W(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = W(\bar{z})$$

Wniosek 2.3.15. Wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Przykład 2.3.16. Rozwiąż równanie $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

$$0 = (z-1)(z^2 - 2z + 4) = (z-1)[(z-1)^2 + 3] = (z-1)[(z-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2] = (z-1)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$$

rozwiązania $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = z_3$

Przykład 2.3.17. Rozwiąż równanie $z^4 + (2+i)z^3 + (7+2i)z^2 + (12+i)z + 6 = 0$, wiedząc, że $z_1 = 2i$ jest jednym z jego rozwiązań.

TABELKA HORNERA

$$(z-2i)(z^3 + (2+3i)z^2 + (1+6i)z + 3i) = 0$$

$$(z-2i)(z+1)(z^2 + (1+3i)z + 3i) = (z-2i)(z+1)^2(z+3i) = 0$$

rozwiązania $z_1 = 2i$, $z_2 = z_3 = -1$, $z_4 = -3i$

Wzory Viète'a (nieobowiązkowe)

Twierdzenie 2.3.18. Niech $W \in \mathbb{C}[z]$, $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$, gdzie $c_n \neq 0$ ma pierwiastki (niekoniecznie różne) $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$. Wówczas

$$\begin{aligned} c_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n) &= -c_{n-1} \\ c_n[(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n) + (r_2 r_3 + r_2 r_4 + \dots + r_2 r_n) + \dots + r_{n-1} r_n] &= c_{n-2} \\ &\dots \\ c_n r_1 r_2 \dots r_n &= (-1)^n c_0 \end{aligned}$$

Dowód. Niech $W(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2) \dots (z-r_n)$. Wymnażając, otrzymujemy

$$W(z) = c_n[(-1)^n r_1 r_2 \dots r_n + (-1)^{n-1} r_2 \dots r_n \cdot z + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \dots r_n \cdot z + \dots + (-1)^{n-1} r_2 r_3 \dots r_{n-1} \cdot z + \dots + (-r_1 - r_2 - \dots - r_n) z^{n-1} + z^n]. \quad \square$$

Przykład 2.3.19. Wielomian $W(z) = 2z^3 - 5z^2 + cz - 5$, $c \in \mathbb{R}$ ma pierwiastek $z_1 = 1 - 2i$. Wyznacz pozostałe pierwiastki oraz wartość współczynnika c .

Wielomian ma współczynniki rzeczywiste, zatem $z_2 = 1 + 2i$. Oznaczmy $a = 2$, $b = -5$, $d = -5$.

Na mocy wzorów Viète'a otrzymujemy $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + z_3 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$. Zatem $z_3 = \frac{1}{2}$ oraz $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{c}{2} - 5 = 0 \Rightarrow c = 12$.

2.4 Interpretacja geometryczna

Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej.
Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.



$|z|$ - odległość z od 0

1) $|z_1 - z_2|$ odległość z_1 od z_2

$$|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$|z-3|$ odległość z od 3

2) $|z - z_1| = r$ równanie okręgu o środku z_1 i promieniu r

$$|z-3| = 1$$

$$|z-3| = |x+iy-3| = |(x-3)+iy| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 1$$

$$S=3$$

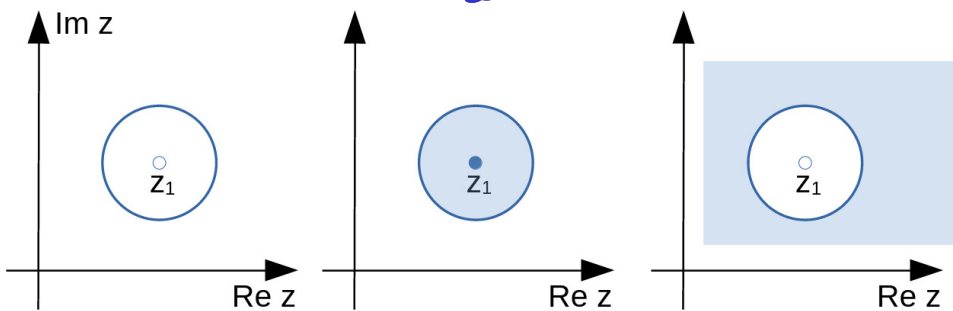
$$r = |(x - x_1) + (y - y_1)i| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$r=1$$

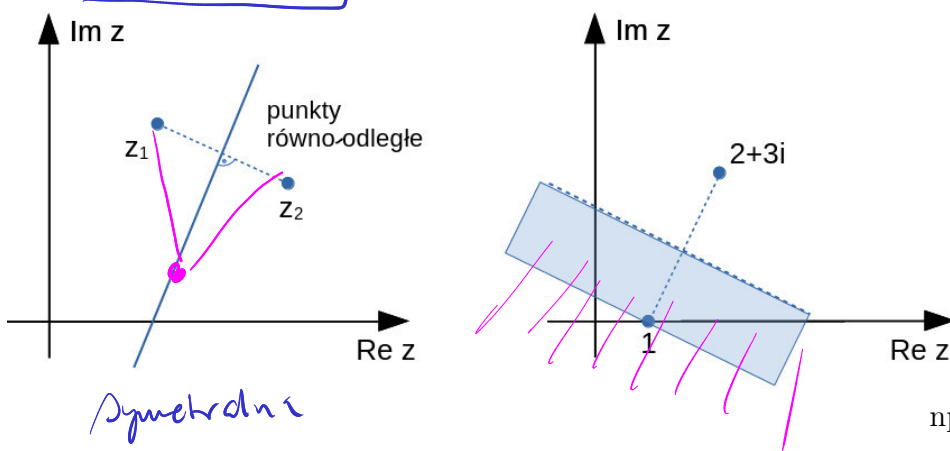
$|z - z_1| = r$ okrąg

$|z - z_1| \leq r$ koło

$|z - z_1| \geq r$ zewnątrz koła



3) $|z - z_1| = |z - z_2|$ równanie symetralnej odcinka o końcach z_1 i z_2



Symetralna

$$z_2 = 2+3i$$

$$\text{np. } |z - 1| < |z - 2 - 3i|$$

blżej do $z_1 = 1$

4) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \varphi\}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ ustalony, to półprosta.

Przykład 2.4.1.

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

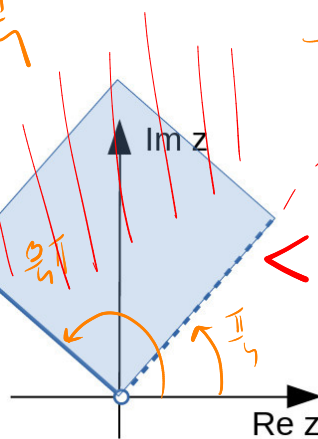
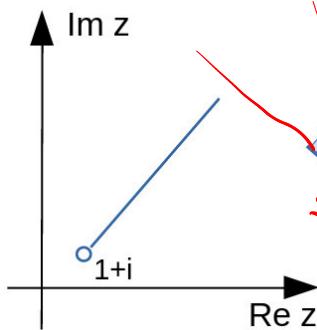
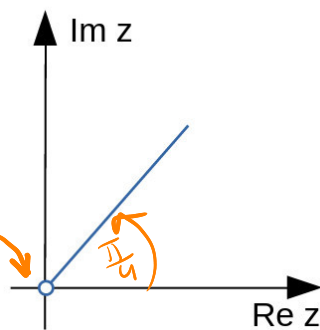
$$\arg(z - 1 - i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{4} \quad z_0 = 1+i$$

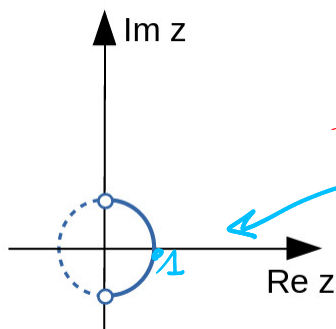
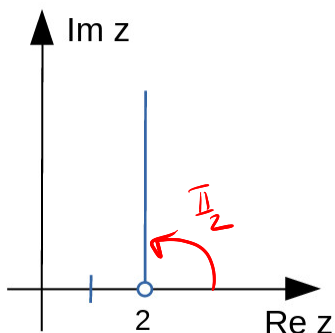
$$\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$$



$z=0$
argument
nieokreślony

$$\arg(z - 2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}$$

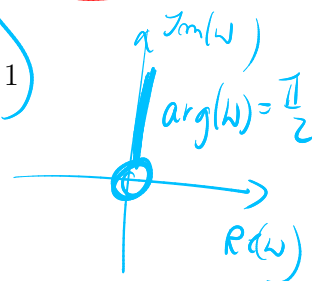


5) Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}\}$ to łuk na okręgu.

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i] \cdot [x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2 - xyi + xi + xyi + x^2 + y^2 - 1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$z = x+iy \quad \text{Re} w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}, \quad \text{Im} w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re} w = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \\ \text{Im} w \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

$$w = a+bi, \quad a=0, \quad b>0$$



TEMAT: Macierze i ich własności. Wyznacznik macierzy.

3.1 Macierze i ich własności

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$.

Definicja 3.1.1. Funkcję $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$, $A(i, j) = a_{ij}$ nazywamy macierzą (rzeczywistą gdy $K = \mathbb{R}$, zespoloną gdy $K = \mathbb{C}$) o m wierszach i n kolumnach.

Wartości a_{ij} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Odwzorowanie A oznaczamy symbolem $[a_{ij}]_{m \times n}$.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kolumna (pionowo), *wiersz* (poziomo)

Ciąg $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A , zaś ciąg $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A .

Oznaczmy symbolem $M_{m \times n}(K)$ zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach i elementach z K . Gdy $m = n$, piszemy krócej $M_n(K)$. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy macierzą kwadratową stopnia n .

Dla $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ mamy
 $A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład 3.1.2. $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$ *3 wiersze, 4 kolumny*

$$B \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{kwadratowa stopnia 3}$$

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{macierz zerowa wymiaru } m \times n$$

Typy macierzy

Definicja 3.1.3. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

- diagonalną lub przekątniową, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$
- trójkątną górną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$
- trójkątną dolną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$

Oznaczmy:

$D_n(K)$ zbiór macierzy diagonalnych stopnia n

$T_n^G(K)$ zbiór macierzy trójkątnych górnych stopnia n

$T_n^D(K)$ zbiór macierzy trójkątnych dolnych stopnia n

$$T_n^G(K) \cap T_n^D(K) = D_n(K)$$

Przykład 3.1.4. I_n - macierz jednostkowa stopnia n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in D_3(K)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in T_3^G(K) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in T_3^D(K)$$

lower

triangular

upper
triangular

Działania na macierzach

- Dodawanie macierzy: Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.
 $C = A + B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Mnożenie macierzy przez skalar: Niech $\alpha \in K$, $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$.
 $C = \alpha \cdot A$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
Oznaczamy $-A = (-1) \cdot A$ oraz $A - B = A + (-B)$.
- Mnożenie macierzy: Niech $A \in M_{m \times p}(K)$, $A = [a_{ik}]$, $B \in M_{p \times n}(K)$, $B = [b_{kj}]$.
 $C = A \cdot B$, $C = [c_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$
Dla $r \in \mathbb{N}$ oznaczamy $A^r = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{r\text{-razy}}$
 $A \cdot A = A^2$
- Transponowanie: Niech $A \in M_{m \times n}(K)$, $A = [a_{ij}]$
 $C = A^T$, $C = [c_{ij}] \in M_{n \times m}(K)$, $c_{ij} = a_{ji}$
zmienia!

A ma tyle samo
kolumn
co B ma wierszy
to można
wykonać $A \cdot B$

$$A \cdot B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \quad M_2(\mathbb{R})$$

Przykład 3.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jakie mnożenia są wykonalne? Wyznacz $C - 2D$, $\frac{1}{2} \cdot A^T$, AB , BA , D^2 .

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = AB \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{schemat Falka}$$

$$B \quad A$$

$$G = BA \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$$D^2 = D \cdot D \in M_2(\mathbb{R}), \quad CA \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad \text{zaś } AC \text{ jest niewykonalne}$$

$$CD \in M_2(\mathbb{R}), \quad DC \in M_2(\mathbb{R}), \quad CD = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 14 & 23 \end{bmatrix}, \quad CD \neq DC$$

Własności działań na macierzach

Twierdzenie 3.1.6. Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M_{m \times n}(K)$, $\alpha, \beta \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $A + B = B + A$ przemienne

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ łączność

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$ e. neutralny

iv) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

v) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

vi) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

Wniosek 3.1.7. $(M_{m \times n}(K), +)$ jest grupą abelową.

$$A + (-A) = \mathbf{0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3.1.8. Niech A, B, C będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(AB)C = A(BC)$ *Tacne*

ii) $(A+B)C = AC + BC$

iii) $A(B+C) = AB + AC$

iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $AI = A$

vi) $IA = A$

*obustronnie
możliwe
względem
dodawania*

*"mieszana"
prawdziwość*

Nie jest przemienne

$AB \neq BA$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AI = A$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}$$

Wniosek 3.1.9. i) $(M_n(K), \cdot)$ jest półgrupą nieprzemianną z jedynką.

ii) $(M_n(K), +, \cdot)$ jest pierścieniem nieprzemiannym z jedynką.

Poniższy przykład pokazuje, że $(M_n(K), +, \cdot)$ nie jest ciałem, bowiem w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała K istnieją dzielniki zera.

Przykład 3.1.10. Rozważmy macierze $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Obli-

czamy $BA = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ oraz $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$AB = 0 \quad A \neq 0 \quad B \neq 0$

$$\begin{array}{cc|cc} 6 & 6 & & \\ 3 & 3 & & \\ \hline -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Twierdzenie 3.1.11. Niech A, B będą macierzami o elementach z K oraz niech $\alpha \in K$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli działania są wykonalne, to wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

v) $(A^r)^T = (A^T)^r$

Wniosek 3.1.12
 $A \cdot A = A^2$

$(A \cdot A)^T = A^T \cdot A^T = (A^T)^2$

$A \quad 2 \times 3$

$B \quad 3 \times 4$

$AB \quad 2 \times 4$

$A^T \quad 3 \times 2$

$B^T \quad 4 \times 3$

$B^T A^T$

Definicja 3.1.12. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Sumę elementów na przekątnej $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ nazywamy śladem macierzy A i oznaczamy symbolem $\text{tr}(A)$.

Przykład 3.1.13. $\text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$

↑ trace / ŚLAD

A - kwadratowa!

Własności śladu macierzy

Twierdzenie 3.1.14. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ ii) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

iii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ iv) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.15. Jeśli $A, B \in M_{m \times n}(K)$, to wówczas $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.16. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.17. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}[(A + A^T)]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antisymetryczna

$$A^T = A$$

$$b_{11} = -b_{11} \quad b_{22} = -b_{22}$$

Definicja 3.1.19. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij} , dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j -tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

determinant

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 5$$

$$\det B = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa (tylko dla wyznaczników stopnia 3!)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6) - [3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K .

i) *Minorem elementu a_{ij}* nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n - 1$ otrzymanej poprzez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A . Oznaczamy go symbolem M_{ij} .

ii) *Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}* nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -22 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 80 \end{bmatrix}$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$$