

Twierdzenie 3.1.14. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$. Wówczas prawdziwe są następujące równości.

i) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ ii) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

iii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ iv) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Wniosek 3.1.15. Jeśli $A, B \in M_{m \times n}(K)$, to wówczas $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(BA^T)$.

Definicja 3.1.16. Macierz kwadratową $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy macierzą:

a) *symetryczną*, gdy $A = A^T$

b) *antysymetryczną*, gdy $A = -A^T$

Twierdzenie 3.1.17. Każdą macierz kwadratową można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antisymetrycznej.

Dowód. $A = B + C$, gdzie $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, $B = B^T$, $C = -C^T$. Ponadto $B^T = \left[\frac{1}{2}(A + A^T)\right]^T = \frac{1}{2}[(A + A^T)]^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$. Analogicznie sprawdzamy, że $C^T = -C$. $\square$

Przykład 3.1.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ macierz symetryczna

$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ macierz antisymetryczna

$$A^T = A$$

$$b_{11} = -b_{11} \quad b_{22} = -b_{22}$$

Definicja 3.1.19. Macierz utworzoną z macierzy A_{ij} , dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ postaci

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą blokową*. Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy, zaś macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j -tej kolumnie muszą mieć te same liczby kolumn.

3.2 Wyznacznik macierzy

Definicja indukcyjna wyznacznika

Definicja 3.2.1. Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy liczbę $\det A \in K$ określoną następująco:

determinant

$$A = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 5$$

$$\det B = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- gdy $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
- gdy $n \geq 2$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$,

gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie pierwszego wiersza i j -tej kolumny.

Oznaczenia:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Przykład 3.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \det B = (-1)^{1+1} a_{11} \det B_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det B_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det B_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -59$$

Metoda Sarrusa (tylko dla wyznaczników stopnia 3!)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-6) - [3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6) \cdot 1 + 8 \cdot (-2) \cdot 2] = -59$$

Definicja 3.2.3. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach z K .

i) *Minorem elementu a_{ij}* nazywamy wyznacznik macierzy A_{ij} stopnia $n - 1$ otrzymanej poprzez skreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny macierzy A . Oznaczamy go symbolem M_{ij} .

ii) *Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}* nazywamy liczbę $D_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \in K$.

Przykład 3.2.4. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 11 & 17 & 16 \\ -3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

$$B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \det B_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 33 = -17$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} M_{23} = 17$$

dopełnienie alg.

Twierdzenie 3.2.5 (Laplace'a). Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$, gdzie $n \geq 2$. Wówczas:

i) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik},$

(rozwiniecie względem i -tego wiersza)

ii) $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{kj}.$

(rozwiniecie względem j -tej kolumny)

Przykład 3.2.6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem drugiego wiersza.

$$\det B = 0 \cdot D_{21} + 2 \cdot D_{22} + (-1) \cdot D_{23} = 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ Rozwijamy względem czwartej kolumny,

a potem względem ostatniego wiersza.

$$\det C = 4 \cdot (-1)^9 M_{54} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4(3D_{41} + 2D_{42}) =$$

$$-12 \cdot (-1)^5 M_{41} - 8 \cdot (-1)^6 M_{42} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Wniosek 3.2.7. Niech $A = [a_{ij}] \in T_n^G(K)$ lub $A = [a_{ij}] \in T_n^D(K)$. Wówczas

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Przykład 3.2.8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

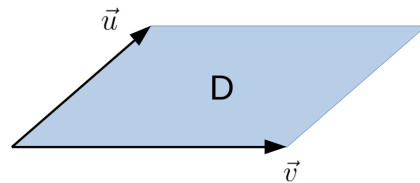
$\det A = 5 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -11 & 22 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2$

$\det B = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -60$

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy stopnia 2

Rozważmy wektory na płaszczyźnie $\vec{u} = [a, b]$, $\vec{v} = [c, d]$. Niech D będzie równoległobokiem rozpiętym na tych wektorach. Wówczas pole $|D|$ tego równoległoboku jest równe $|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$.

Dowód można znaleźć w [3].



Własności wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Oznaczmy przez A_k k -tą kolumnę macierzy A , czyli $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $A \in M_n(K)$. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia.

- i) $\det A = \det(A^T)$
- ii) Jeśli pewna kolumna składa się z samych zer, to wówczas $\det A = 0$.
- iii) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie jednej kolumny przez liczbę $\lambda \neq 0$, to wówczas $\det B = \lambda \cdot \det A$.
- iv) Jeśli $A_k = B_k + C_k$, to wówczas $\det A = \det[A_1, \dots, B_k, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, C_k, \dots, A_n]$
- v) Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez przestawienie między sobą dwóch kolumn, to wówczas $\det B = -\det A$.
- vi) Jeśli istnieją $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $k \neq l$ oraz $A_k = \lambda A_l$, dla pewnego $\lambda \in K$, to wówczas $\det A = 0$.
- vii) Jeśli jedna z kolumn jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in K : A_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \cdot A_j$, to wówczas $\det A = 0$.
- viii) Jeśli do dowolnie wybranej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn macierzy A , to wyznacznik nie zmieni się.
- ix) Jeśli $B \in M_n(K)$, to wówczas $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- x) Jeśli macierz A jest macierzą blokową postaci

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hline ? & ? & \dots & B_n \end{array} \right],$$

gdzie $B_1, B_2, \dots, B_n$ są macierzami kwadratowymi (na ogół różnych stopni), $\mathbf{0}$ macierzami zerowymi, zaś $?$ dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów, to wówczas $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_n$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 3\lambda & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda - 6\lambda = -2\lambda$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

kolumny proporcjonalne

Tw. Cauchy'ego

$$A = B$$

$$\det(A \cdot A) = \det A$$

$$\det(A^T) = (\det A)^2$$

Przykład 3.2.10.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right] \quad \text{macierz blokowo - diagonalna}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = (2 - 7) \cdot (40 - 15) = -125$$

Wniosek 3.2.11. i) Analogiczne własności zachodzą dla wierszy.

tw. iii) $\Rightarrow$ ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$ dla dowolnego $0 \neq \lambda \in K$

tw. ix) $\Rightarrow$ iii) $\det(A^r) = (\det A)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.

Metoda operacji elementarnych obliczania wyznacznika

Operacje elementarne: $w_i \leftrightarrow w_j$ zamiana wierszy miejscami (między sobą)
 $\lambda \cdot w_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$ pomnożenie wiersza przez liczbę (różną od zera)
 $w_i + \lambda \cdot w_j, \lambda \in K$ dodanie do w_i wielokrotności w_j

Przykład 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3} \cdot w_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_4 + 5w_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -17 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3} = -22$$

Handwritten notes: $1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{22}{3}$, $1 \cdot (-3)$, $+3$

Przykład 3.2.13. Dane są macierze $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ takie, że $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \neq j \\ 2(i-1) + j & ; i = j \end{cases}, \text{ zaś } \det B = 9. \text{ Oblicz wyznacznik macierzy } C = 3B^3 A^2 B^T.$$

Korzystając z własności wyznaczników, obliczamy

$$\det C = 3^5 \det(B^3) \det(A^2) \det(B^T) = 3^5 (\det B)^4 (\det A)^2.$$

Ponadto $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$

Zatem $\det C = 3^5 \cdot 9^4 \cdot (3^5 \cdot 2^3)^2 = 3^{23} \cdot 2^6$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$C = 3 \cdot B^3 \cdot A^2 \cdot B^T$

Tw. Cauchy'ego $\det C = \det(3B^3) \det(A^2) \det(B^T)$

$\det C = 3^5 \cdot 9^4 \cdot (3^5 \cdot 2^3)^2 = 3^{23} \cdot 2^6$

iloczyn elementów na przekątnej

3.3 Macierz odwrotna

Jeśli dla danej macierzy kwadratowej $A \in M_n(K)$ istnieją macierze $B, C \in M_n(K)$ takie, że $AB = I$ oraz $CA = I$, to wówczas $B = C$.¹³ Istotnie,

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Definicja 3.3.1. Macierz $B \in M_n(K)$ nazywamy macierzą odwrotną do macierzy $A \in M_n(K)$, jeżeli $AB = BA = I_n$. Oznaczamy ją wówczas symbolem A^{-1} .

Przykład 3.3.2.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c = 0 \wedge c = 1$ sprzeczność

Zatem nie istnieje A^{-1} .

Definicja 3.3.3. i) Macierz $A \in M_n(K)$, dla której istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą odwracalną.

ii) Macierz $A \in M_n(K)$ taką, że $\det A = 0$ nazywamy macierzą osobliwą. W przeciwnym wypadku nazywamy ją macierzą niesobliwą.

Twierdzenie 3.3.4. a) Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesobliwa. Macierz odwrotna jest wówczas określona jednoznacznie.

b) Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą niesobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Definicja 3.3.5. Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą niesobliwą, zaś $D = [D_{ij}]$ macierzą jej dopełnień algebraicznych. Macierz D^T nazywamy macierzą dołączoną do macierzy A i oznaczamy symbolem A^D .

Wniosek 3.3.6. Zbiór macierzy kwadratowych niesobliwych stopnia n o elementach z ciała K wraz z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę nieprzemianną. Grupę tę oznaczamy symbolem $GL_n(K)$ i nazywamy ogólną grupą liniową.

¹³Można uzasadnić tenże fakt przy słabszych założeniach, mianowicie jeśli dla danej macierzy $A \in M_n(K)$ istnieje macierz $B \in M_n(K)$ taka, że $BA = I$, to wówczas $AB = I$ i vice versa.

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. Za pomocą definicji

Przykład 3.3.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ?$

$\det A = 11 \neq 0$, zatem A jest odwracalna.

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a-b & 5a+2b \\ 3c-d & 5c+2d \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=1 \\ 5a+2b=0 \\ 3c-d=0 \\ 5c+2d=1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

2. Metoda dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa)

Przykład 3.3.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = ?$$

Ćwiczenie

$\det A = -3 \neq 0$, zatem A jest odwracalna. Niech $M = [M_{ij}]$ oznacza macierz minorów elementów a_{ij} . Wówczas

macierz minorów
 $M = [M_{ij}]$

$$M = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

9·3 - 5·4 = 27 - 20 = 7

⚡

$$D = [D_{ij}] = [(-1)^{i+j} M_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

DT
 $A \cdot A^{-1} = I$

3. Metoda operacji elementarnych (metoda bezwyznacznikowa)

$w_i \leftrightarrow w_j$ Niech $A \in M_n(K)$ będzie macierzą nieosobliwą.

$\lambda \cdot w_i \quad \lambda \neq 0$

$w_i + \lambda \cdot w_j$

$$[A|I] \xrightarrow[\text{tylko na wierszach!}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Algorytm Gaussa: macierz nieosobliwa $\rightarrow$ macierz trójkątna górna $\rightarrow I$

! (na kolumnach nie wolno)

Metoda eliminacji Gaussa to praktyczny sposób używania metody operacji elementarnych.

Przykład 3.3.9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

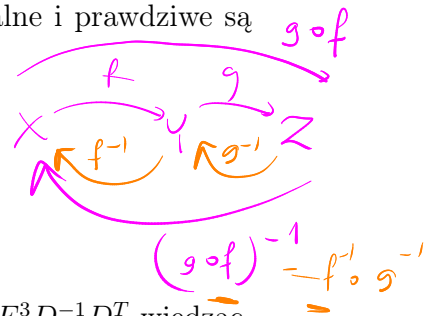
$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Własności macierzy odwrotnej

Twierdzenie 3.3.10. Niech $A, B \in M_n(K)$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$. Jeśli macierze A i B są odwracalne, to wówczas macierze A^{-1} , A^T , AB , αA , A^r również są odwracalne i prawdziwe są następujące równości.

- i) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
- iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$
- v) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- vi) $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$



Przykład 3.3.11. Rozwiążemy równanie macierzowe $E^4(X - 4I)^T = \frac{1}{2}E^3F^3D^{-1}D^T$ wiedząc, że $D, E, F \in M_4(\mathbb{R})$ są nieosobliwe, ponadto macierz D jest macierzą symetryczną, zaś

dane
 $X = ?$
 $X \in M_4(\mathbb{R})$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}.$$

$$D^T = D$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$E^4 \cdot (X - 4I)^T = \frac{1}{2} E^3 F^3 D^{-1} D^T$$

Ponieważ D jest symetryczna, spełnia warunek $D = D^T$. Stąd $D^{-1} D^T = D^{-1} D = I$.

Ponadto F jest diagonalna, zatem $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Macierz E jest nieosobliwa, a zatem odwracalna. Obliczamy

$$\begin{aligned} E^4(X - 4I)^T &= \frac{1}{2} E^3 F^3 D^{-1} D^T = \frac{1}{2} E^3 F^3 \\ (X - 4I)^T &= E^{-4} \frac{1}{2} E^3 F^3 = \frac{1}{2} E^{-1} F^3 \\ X - 4I &= \left(\frac{1}{2} E^{-1} F^3 \right)^T = \frac{1}{2} (F^3)^T (E^{-1})^T \\ X &= 4I + \frac{1}{2} (F^3)^T (E^{-1})^T \end{aligned}$$

Pozostaje obliczyć E^{-1} i wykonać odpowiednie mnożenia oraz dodawania.

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$$

Twierdzenie 3.3.12. Jeśli macierz kwadratowa A jest macierzą blokowo-diagonalną postaci

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}, \text{ to } A \text{ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalne są}$$

macierze $A_1, A_2, \dots, A_k$. Wówczas $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{-1} \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Przykład 3.3.13. Czy $A = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ jest odwracalna? Jeśli tak, oblicz A^{-1} .

Jest to macierz blokowo-diagonalna $\left[\begin{array}{ccc|c} 22 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \pi \end{array} \right]$.

Każdy z bloków jest macierzą nieosobliwą, zatem A jest odwracalna.

Obliczamy $\begin{bmatrix} 22 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$.

Stąd $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix}$

metoda
dopelnienia dg -

TEMAT: *Układy równań liniowych*

4.1 Układy równań liniowych - podstawowe pojęcia

Niech $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$. Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

m równań, n niewiadomych

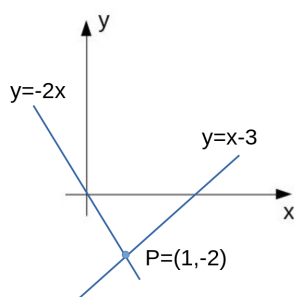
Liczby $a_{ij} \in K$ nazywamy *współczynnikami* układu, zaś liczby b_i *wyrazami wolnymi*. Jeśli $b_1 = \dots = b_m = 0$ to układ równań nazywamy *jednorodnym*. Jeśli $b_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, to układ nazywamy *niejednorodnym*.

Rozwiązaniem układu nazywamy dowolny ciąg $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in K^n$ spełniający ten układ. Układ nie posiadający rozwiązania nazywamy *układem sprzecznym*, układ posiadający dokładnie jedno rozwiązanie - *układem oznaczonym*, zaś układ posiadający nieskończenie wiele rozwiązań - *układem nieoznaczonym*.

Przykład 4.1.1.

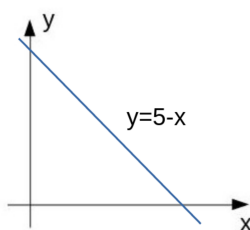
$ax + by = c$ *rownanie proste*

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$



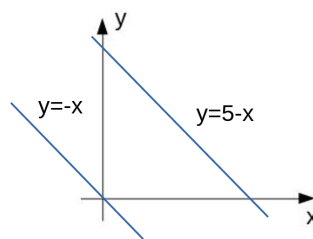
układ oznaczony

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$



układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$



układ spreczny

$ax + by + cz = d$
 $\mathbb{R}^3$

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz kolumna kolumna
współczynników niewiadomych wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$A \cdot X = B$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$X = ?$

4.2 Układy Cramera

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy układem Cramera.

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera). Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą wzorów Cramera

$W = \det A$
 $W \neq 0$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

$x = \frac{W_x}{W}$

$y = \frac{W_y}{W}$

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

STOP

Przykład 4.2.4.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$ układ jest układem Cramera

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego: