

Rozpatrywany układ równań liniowych jest równoważny z równaniem macierzowym $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz kolumna kolumna
współczynników niewiadomych wyrazów wolnych

Przykład 4.1.2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4.2 Układy Cramera

Definicja 4.2.1. Jeśli $m = n$ oraz macierz $A \in M_n(K)$ jest nieosobliwa, to układ równań $AX = B$ nazywamy układem Cramera. *tylko samo równanie co niewiadomych*

Twierdzenie 4.2.2 (Cramera). Układ Cramera jest układem oznaczonym.

Dowód. Ponieważ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$, mamy $X = A^{-1}B$. $\square$

Wniosek 4.2.3. Rozwiązanie układu Cramera ma postać $X = A^{-1}B$. Można je również znaleźć za pomocą wzorów Cramera

gdzie A_i jest macierzą powstałą z macierzy A poprzez zastąpienie i -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

Przykład 4.2.4.

Układ $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ jest równoważny równaniu $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$W = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow$ układ jest układem Cramera

Metoda eliminacji:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, zatem $2x + 4(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}) = 1$, skąd $x = \frac{11}{8}$ oraz $y = -\frac{7}{16}$

Rozwiązanie równania macierzowego:

$$X = A^{-1}B, A^{-1} = ?$$

Metoda dopełnień alg.

$$\det A = 16, D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, X = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 22 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad x = \frac{11}{8}, y = -\frac{7}{16}$$

$$A^{-1} \cdot B$$

Wzory Cramera:

$$W = \det A = 16 \neq 0, W_x = \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 22, W_y = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{16}, y = \frac{W_y}{W} = -\frac{7}{16}$$

$$AX = B$$

Wniosek 4.2.5. i) Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe $x_1 = \dots = x_n = 0$.

$$W_{x_1} \dots W_{x_n} = 0$$

ii) Jeśli $\det A = 0$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

Przykład 4.2.6.

Układ $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ jest układem sprzecznym. Ponadto $W = W_x = W_y = 0$.

Uwaga 4.2.7. i) Można wykazać, że jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest sprzeczny.

ii) Jeśli $\det A = 0$ oraz $\det A_i = 0$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to układ jest nieoznaczony lub sprzeczny.

4.3 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego

$m \neq n$
na ogół

Definicja 4.3.1. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. Minorem stopnia k macierzy A , gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej otrzymanej z macierzy A poprzez skreślenie $m - k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Definicja 4.3.2. Rzędem macierzy $A \in M_{m \times n}(K)$, $A \neq 0$ nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Liczbę tę oznaczamy $r(A)$ lub $\text{rank}(A)$. Ponadto przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

Przykład 4.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}, r(A) \leq 3, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -50 \neq 0, r(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$3k_1 = k_2$$

kolumny proporcjonalne

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, r(A) \leq 2, \quad \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, r(B) = 1, \quad \text{Można zauważyć, że } k_2 = 3k_1.$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, r(A) \leq 3, w_2 = 2w_1, w_3 = 3w_1, r(D) = 1$$

Wszystkie
mimo
stopnia 2 są
zerowe

Twierdzenie 4.3.4 (Własności rzędu macierzy). Niech $A \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas

i) $r(A) = r(A^T)$,

ii) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.

$w_i \leftrightarrow w_j$

Dowód. Teza wynika z własności wyznaczników. $\square$

$\alpha \cdot w_i, \alpha \neq 0, \alpha \in K$

Definicja 4.3.5. Macierz $A \in M_{m \times n}(K)$ nazywamy *macierzą schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Ponadto przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

$w_i + \alpha \cdot w_j$

Przykład 4.3.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

4 schodki

3 schodki

to nie postać schodkowa

jeżeli trzeba

$$w_4 - \frac{7}{6} \cdot w_3$$

Twierdzenie 4.3.7. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (tj. schodków).

Dowód. Skreślając wiersze zerowe i kolumny nie wyznaczające schodków, otrzymamy macierz trójkątną górną nieosobliwą. $\square$

Przykład 4.3.8.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3 - 4w_1 \\ w_4 - 4w_1}]{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & -8 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 + w_2]{w_3 + 2w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & -17 \end{bmatrix}, r(D) = 3$$

$w_4 - w_3$

ZAPIS

$$r(D) = r[L]$$

Rozważmy układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach z K postaci $AX = B$.

macierz blokowa

n -liczba kolumn
 $m \times n$
↓
a zatem
liczba niewiadomych

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Macierz $U = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in M_{m \times (n+1)}(K)$ nazywamy macierzą uzupełnioną układu $AX = B$.

Twierdzenie 4.3.9 (Kroneckera-Capellego). Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(U)$.

Wniosek 4.3.10. i) Gdy $r(A) \neq r(U)$, układ jest sprzeczny.

(przez kontrapozycję)

ii) Gdy $r(A) = r(U) = n$, układ jest oznaczony.

↖ liczba niewiadomych

iii) Gdy $r(A) = r(U) = r < n$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Przykład 4.3.11.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ 4x + y + 7z = 8 \\ 5x + 2y + 8z = 4 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 4 \end{array} \right], \quad r(A) \leq 3, r(U) \leq 3$$

$A \quad 3 \times 3$

$U \quad 3 \times 4$

$$U \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 4w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{7}w_3]{\frac{1}{5}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{array} \right]$$

$r(U) = 3 \neq r(A) = 2 \Rightarrow$ układ sprzeczny, brak rozwiązań

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -\frac{3}{5}$$

Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

1. Jeśli $r(A) < r(U)$, układ jest sprzeczny.

2. Niech $r(A) = r(U) = r$. Istnieje niezerowy minor M stopnia r macierzy A (będący również minorem macierzy U). Wówczas układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

(oznaczony lub niewiadomy)

2a. Skreślamy $m - r$ wierszy macierzy U (równań układu), które nie tworzą M . Jeśli $r = n$, to otrzymujemy układ Cramera.

oznaczony

2b. Jeśli $r < n$, to $n - r$ niewiadomych, których współczynniki nie tworzą M , przenosimy na stronę wyrazów wolnych i traktujemy je dalej jako parametry (zmiennie niezależne). Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Mówiąc dokładniej r spośród niewiadomych oznaczanych $x'_1, \dots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych $x'_{r+1}, \dots, x'_n$.

Przykład 4.3.12.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \\ 4x + 5y - 13z = 1 \end{cases}$$

$n = 3$

$r(A) = r(U) = 2$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{array} \right], r(A) \leq 3, r(U) \leq 3$$

$$U \xrightarrow[k_1 \leftrightarrow k_2]{\text{zmienne } y \ x \ z} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -13 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 + 5w_1]{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ 0 & 14 & 2 & 36 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \\ 0 & 7 & 1 & 18 \end{array} \right]$$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ minor niezerowy

$\begin{cases} -y + 2x = 7 - 3z \\ 7x = 18 - z \end{cases}$ lub $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3z \\ 18 - z \end{bmatrix}$

układ nieoznaczony, rozwiązania $\begin{cases} x = \frac{18}{7} - \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{13}{7} + \frac{20}{7}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$w_3 = 2w_2$

Wniosek 4.3.13 (Własności rzędu macierzy). Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas

i) Jeśli $\det A \neq 0$, to wówczas $r(AB) = r(B)$.

ii) Jeśli $\det B \neq 0$, to wówczas $r(AB) = r(A)$.

4.4 Metoda eliminacji Gaussa

Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, gdy posiadają ten sam zbiór rozwiązań. Operacje elementarne na wierszach macierzy U , skreślenie wiersza złożonego z samych zer lub skreślenie jednego z dwu wierszy proporcjonalnych (równych) nie zmieniają rzędu macierzy U , zatem prowadzą one do równoważnego układu równań. Ewentualne przestawienie kolumn macierzy A prowadzi do zmiany kolejności występowania niewiadomych.

Dokonując równoważnych przekształceń układu równań $AX = B$, sprowadzamy macierz $U = [A|B]$ do postaci

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1,n} & z_1 \\ & & & & & & \dots \\ & & & s_{r,r+1} & \dots & s_{r,n} & z_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array} \right].$$

Jeśli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r = n$, układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest $x_i = z_i$, dla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Jeśli ostatni wiersz się nie pojawi oraz $r < n$, układ jest nieoznaczony. Rozwiązania mają postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{r,r+1} & \cdots & s_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Przykład 4.4.1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$r(A) = 2$$

Rów. sprzeczne

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3-3w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Równanie $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$ jest sprzeczne, zatem układ jest sprzeczny.

$$r(U) = 3$$

Przykład 4.4.2.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 9z - 5t + 6u = 13 \\ x + 2y + 4z - 4t + 2u = 5 \\ 3x + 6y + 7z - 11t + 2u = 18 \\ 4x + 8y + 19z - 15t + 11u = 20 \\ -\frac{1}{2}x - y + z + 3t + 2u = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 3 & 2 & -\frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_1]{-2 \cdot w_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & -5 & 6 & 13 \\ 3 & 6 & 7 & -11 & 2 & 18 \\ 4 & 8 & 19 & -15 & 11 & 20 \\ 1 & 2 & -2 & -6 & -4 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[w_5-w_1]{w_2-2w_1, w_3-3w_1, w_4-4w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[k_2 \text{ za } k_5]{\text{zmienne } x, z, t, u, y} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-3w_2]{w_3+5w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(-1) \cdot w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{k_3 \leftrightarrow k_4}{\text{zmienne } x, z, u, t, y} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow[w_2-2w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{w_1-4w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

x z u t y

$$n=5$$

$$r(A) = 3$$

$$r(U) = 3$$

ukł. nieznan.

$$\text{równoważny układ } \begin{cases} x + 2y = 11 \\ z - \frac{7}{3}t = -3 \\ u + \frac{8}{3}t = 3 \end{cases} \quad \text{rozwiązania } \begin{cases} x = 11 - 2y \\ z = -3 + \frac{7}{3}t \\ u = 3 - \frac{8}{3}t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$r(A) = r(U) = 3 < n = 5$ układ nieoznaczony, nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $5 - 3 = 2$ parametrów

Uwaga 4.4.3. Podział niewiadomych na zmienne zależne i parametry nie jest jednoznaczny, lecz nie jest dowolny.

Przykład 4.4.4. Wskaż zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniu układu równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$U = [A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad r := r(A) = r(U) = 2, n = 5, n - r = 3 \text{ parametry}$$

Trzy zmienne spośród pięciu można wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

Nie wszystkie wybory są dozwolone.

minory niezerowe	parametry
k_1, k_3	$\{y, s, t\}$
k_1, k_5	$\{y, z, s\}$
k_2, k_3	$\{x, s, t\}$
k_2, k_5	$\{x, z, s\}$
k_4, k_3	$\{x, y, t\}$
k_4, k_5	$\{x, y, z\}$
k_3, k_5	$\{x, y, s\}$

x i y za pomocą z, s, t
nieoznaczne!

Uwaga 4.4.5. W przypadku gdy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy uzupełnionej $U = [A|B]$, sprowadzamy tę macierz do postaci $[I|X]$, gdzie X jest poszukiwanym rozwiązaniem układu.

$$U = [A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Przykład 4.4.6.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{3}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[w_2+w_3]{w_1+w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[(-1) \cdot w_3]{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

układ oznaczony, jedyne rozwiązanie $x = 1, y = 1, z = 1$

Przykład 4.4.7. Określ ilość rozwiązań układu w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2p+4)x_3 + (4p+6)x_4 = p+15 \\ (p+1)x_1 + 2x_2 + (p+1)x_3 + (p+3)x_4 = p+4 \\ x_1 + 2x_2 + (p+3)x_3 + (2p+2)x_4 = 11 \end{cases}$$

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 2 & 4 & 2p+4 & 4p+6 & p+15 \\ p+1 & 2 & p+1 & p+3 & p+4 \\ 1 & 2 & p+3 & 2p+2 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-w_1]{w_2-2w_1, w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & p+1 & p+3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2p & p+7 \\ p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 2 & p+1 & 7 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[k_1 \text{ za } k_3]{\text{zmienne } x_2, x_3, x_1, x_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p+1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & p+1 & 1 & p+3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2p & p+7 \\ 0 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & -p \end{array} \right]$$

Wnioski:

1) Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mamy $r(A) = r(U) = n = 4$, zatem układ jest oznaczony.

2) Dla $p = 0$ ostatnia macierz przyjmuje postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

skąd otrzymujemy, że $r(A) = r(U) = 3 < n = 4$.

Zatem układ jest nieoznaczony.

Posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

3) Dla $p = 1$ ostatnia macierz przyjmuje postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

skąd otrzymujemy, że układ jest sprzeczny.

↑ równanie sprzeczne
 $r(U) = 4$
 $r(A) = 3 \neq$

TEMAT: Geometria analityczna w $\mathbb{R}^3$

5.1 Wektory w przestrzeni

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować jako:

- zbiór punktów $P = (x, y, z)$, gdzie x, y, z to współrzędne punktu
- zbiór wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$, gdzie x, y, z to współrzędne wektora
- zbiór wektorów swobodnych $\vec{a}$. Wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów zaczepionych (w różnych punktach) mających ten sam zwrot, kierunek i długość.

Oznaczamy przez $\vec{0} = [0, 0, 0]$ wektor zerowy.

Działania na wektorach

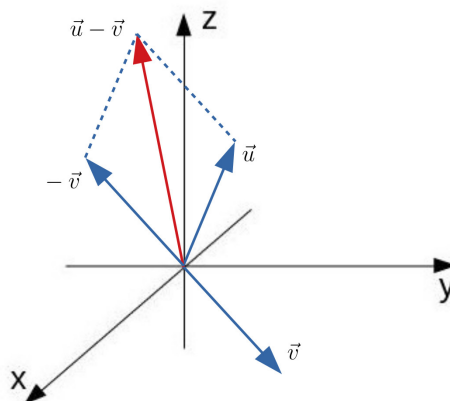
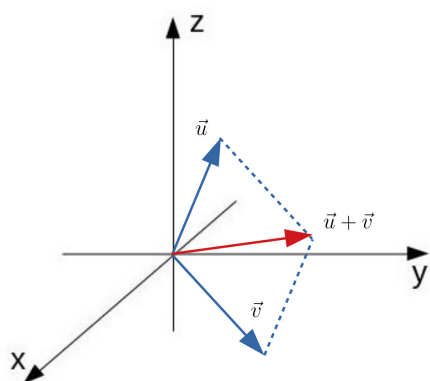
Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z]$ suma wektorów

$\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda u_x, \lambda u_y, \lambda u_z]$ iloczyn wektora przez skalar

$-\vec{u} = [-u_x, -u_y, -u_z]$ wektor przeciwny do $\vec{u}$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$ różnica wektorów



Długość wektora

Oznaczamy przez $|\vec{u}|$ długość wektora $\vec{u}$. Jeśli $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to wówczas

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1], \quad |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Wektor długości 1 nazywamy *wersorem*. Oznaczamy przez $\hat{i} = [1, 0, 0]$, $\hat{j} = [0, 1, 0]$, $\hat{k} = [0, 0, 1]$ wersory osi układu współrzędnych. Wówczas zapis $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oznacza $\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$. Ponadto $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

Własności długości: $|\vec{u}| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

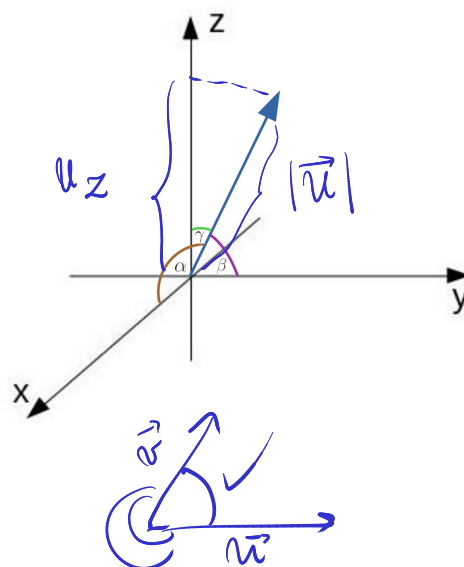
Wersorem niezerowego wektora $\vec{u}$ nazywamy wersor o tym samym kierunku i zwrocie co $\vec{u}$. Oznaczamy go $\hat{u}$. Oczywiście $\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, to $\hat{u} = \left[\frac{u_x}{|\vec{u}|}, \frac{u_y}{|\vec{u}|}, \frac{u_z}{|\vec{u}|} \right]$ oraz

$$|\hat{u}| = \sqrt{\frac{u_x^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_y^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{u_z^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{1}{|\vec{u}|} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1.$$

Jeśli wektor $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych kąty α, β, γ , odpowiednio, to kąty te nazywamy *kątami kierunkowymi*, zaś współrzędne wersora $\hat{u}$, czyli liczby $\cos \alpha = \frac{u_x}{|\vec{u}|}$, $\cos \beta = \frac{u_y}{|\vec{u}|}$, $\cos \gamma = \frac{u_z}{|\vec{u}|}$ nazywamy *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{u}$.

$\vec{u}$ wersor tj. $|\vec{u}| = 1$
 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ współrz. wersora



Iloczyn skalarny

Oznaczamy przez $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ kąt między wektorami $\vec{u}, \vec{v}$. Przyjmujemy, że jego miara należy do przedziału $[0, \pi]$.

Definicja 5.1.1. Iloczynem skalarnym dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy liczbę $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Oznaczamy ją symbolem $\vec{u} \circ \vec{v}$. Gdy jeden z wektorów jest zerowy, przyjmujemy, że iloczyn jest równy 0.

Twierdzenie 5.1.2. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Przykład 5.1.3. $[1, 4, 0] \circ [2, -1, 1] = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -2 < 0$

Cosinus kąta między wektorami jest ujemny, zatem kąt jest rozwarty.

$\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$ $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$ decyduje o znaku

Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$

ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$

iii) $(\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$

iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$ rozdzielny wzgl. +

v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

$$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$$

$$\vec{u} \circ \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

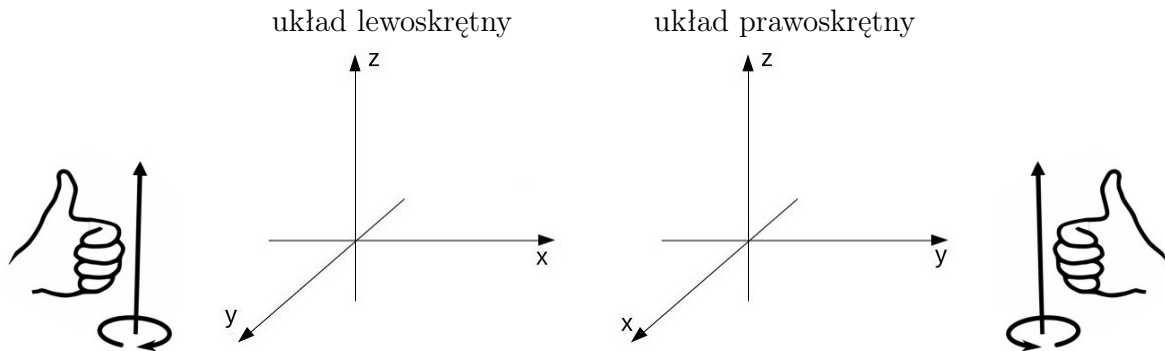
$$0 \leq |\cos \angle(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$$

$$\text{kat } \frac{\pi}{2}$$

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Definicja 5.1.6. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

i) $\vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v},$

ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}),$