

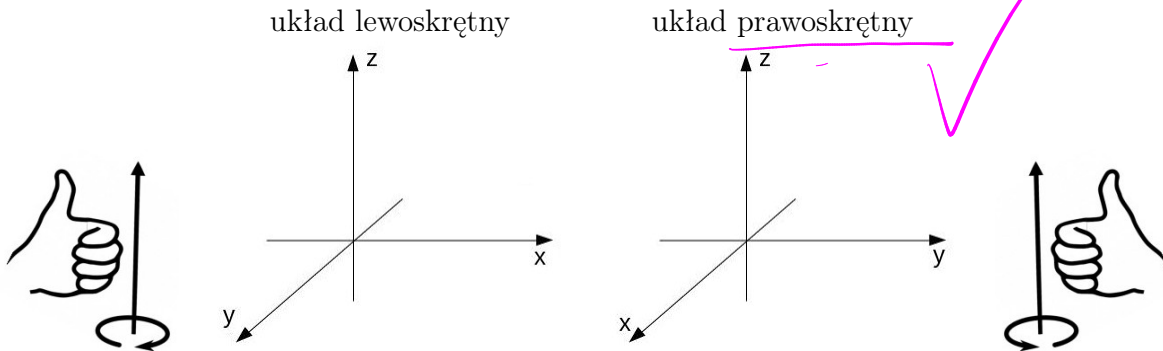
Twierdzenie 5.1.4 (Własności iloczynu skalarnego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

- i) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- ii) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$ $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$
 $\vec{u} \circ \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$
- iii) $(\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v})$
- iv) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$ rozdzielny wzgl. +
 $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\cos \angle(\vec{u}, \vec{v})|$
- v) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ $0 \leq |\cos \angle(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$
- vi) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ kat $\frac{\pi}{2}$

Dowód. Wynika wprost z definicji. $\square$

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ - trójka wzajemnie prostopadłych prostych, przecinających się w jednym punkcie, zwanym początkiem układu współrzędnych.



Definicja 5.1.5. Uporządkowana trójka wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ma orientację zgodną z orientacją układu współrzędnych, jeśli

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0.$$

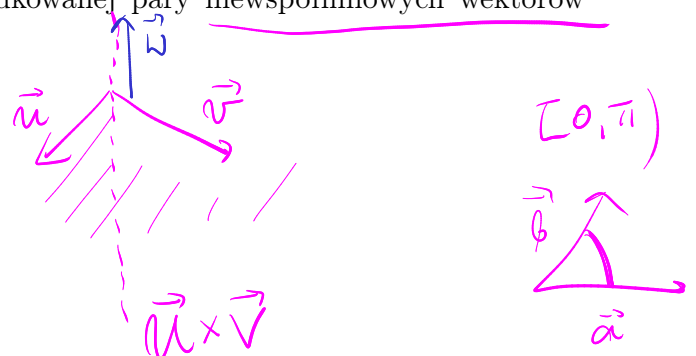
Iloczyn wektorowy

Dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* lub *kolinearnymi*, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Piszemy wówczas $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

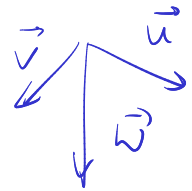
Definicja 5.1.6. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$ taki, że:

- i) $\vec{w} \perp \vec{u}, \vec{w} \perp \vec{v}$, kierunek
- ii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$, długość $|\vec{w}| \geq 0$

I sin
II cos



iii) orientacja trójki $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.



Wektor $\vec{w}$ oznaczamy symbolem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Jeśli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. *wektor zerowy*

Przykład 5.1.7. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

Twierdzenie 5.1.8. Jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to wówczas

! mnemotechnika

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

wektor u, wektor v, wektor k

Przykład 5.1.9. Niech $\vec{u} = [1, 2, -3], \vec{v} = [3, 4, 5]$. Korzystamy z twierdzenia Laplace'a

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = [22, -14, -2]$$

22, -14, -2

lub metody Sarrusa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 4\hat{k} - 9\hat{j} - 6\hat{k} + 12\hat{i} - 5\hat{j} = 22\hat{i} - 14\hat{j} - 2\hat{k}$$

Twierdzenie 5.1.10 (Własności iloczynu wektorowego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ prawdziwe są następujące równości.

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

ii) $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

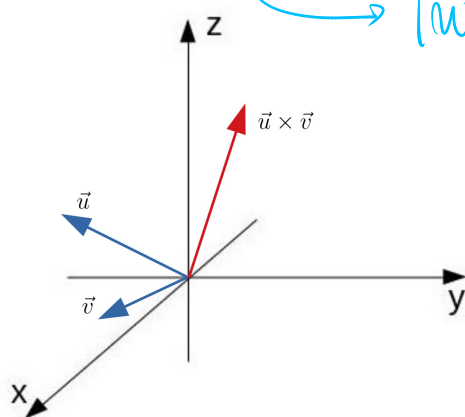
iv) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

v) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

vi) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0})$

iii) lv rozdzielność wzgl. +

Reguła prawej dłoni:



$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \quad \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$$

$$\sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \vec{u} \parallel \vec{v}$$

$$\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{v}| \cdot h = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \varphi$$

Uwaga 5.1.11. Pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$ równe jest $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Iloczyn mieszany

Definicja 5.1.12. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$. Oznaczamy ją symbolem $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Twierdzenie 5.1.13. Niech $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \vec{v} = [v_x, v_y, v_z], \vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$. Wówczas

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Dowód. $\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} =$
 $= [w_x, w_y, w_z] \circ \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \square$

Uwaga 5.1.14. Objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ równa jest $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Dowód. Niech $\alpha = \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$. Ponieważ $V = P_p \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$ oraz $\cos \alpha = \frac{h}{|\vec{w}|}$, zatem $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \alpha = \vec{w} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$. $\square$

Przykład 5.1.15. Czy punkty $A = (1, 0, 2), B = (5, 1, 5), C = (3, -1, 2), D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie?

Punkty leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ jest równa zero.

$$\vec{AB} = [4, 1, 3], \vec{AC} = [2, -1, 0], \vec{AD} = [0, 3, 3]$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - 6 = 0$$

Punkty są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Twierdzenie 5.1.16 (Własności iloczynu mieszanego). Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ prawdziwe są następujące równości.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \circ \vec{u} = \vec{w} \circ (\vec{v} \times \vec{u})$$

i) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$

ii) $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$

iii) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{a}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{a})$

iv) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$

$\sin \alpha \leq 1$

5.2 Symbol Kroneckera i symbol całkowicie antysymetryczny

Podamy definicję dwóch symboli, które często pojawiają się w notacji dotyczącej rachunków na wektorach.

Rozważmy funkcję postaci

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(i, j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Definiuje ona symbol $\delta_{ij} := f(i, j)$ zwany *symbolem Kroneckera* lub *delta Kroneckera*.

Przykład 5.2.1. i) Macierz jednostkowa $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ ma elementy postaci δ_{ij} . Innymi słowy, $I_n = [\delta_{ij}]$, dla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

ii) Niech $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, oraz $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ będą dowolnymi wektorami. Ich iloczyn skalarny możemy zapisać w następującej postaci.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} u_i v_j$$

Definicja 5.2.2. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $i_1, i_2, \dots, i_n$, to liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nie koniecz-
nie różne. *Symbolem całkowicie antysymetrycznym* lub *tensorem Levi-Civita* w n wymiarach nazywamy symbol postaci ¹⁴

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \begin{cases} 1 & ; \text{ permutacja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ jest parzysta} \\ -1 & ; \text{ permutacja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ jest nieparzysta} \\ 0 & ; \text{ nie wszystkie liczby } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ są od siebie różne} \end{cases}.$$

Innymi słowy

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) & ; \text{ gdy } \{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\} \text{ oraz } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \\ 0 & ; \text{ nie wszystkie liczby } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ są od siebie różne} \end{cases}.$$

Uwaga 5.2.3. Permutacje σ oraz $\sigma(j, k)$ różnią się znakiem. ¹⁵ Wprost z definicji wynika zatem, że zamiana miejscami dowolnych dwóch indeksów w ciągu $i_1, i_2, \dots, i_n$ powoduje zmianę symbolu z 1 na -1 i odwrotnie. Dla przykładu, gdy $n = 3$ mamy

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}.$$

Stąd też nazwa symbol całkowicie antysymetryczny.

¹⁴Gdy mówimy o permutacji, to oczywiście mamy na myśli przypadek, gdy liczby $i_1, i_2, \dots, i_n$ są od siebie różne, to jest $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

¹⁵Porównaj z twierdzeniem 1.3.22.

Przykład 5.2.4. i) Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & ; (i, j) = (1, 2) \\ -1 & ; (i, j) = (2, 1) \\ 0 & ; i = j \end{cases}$$

Jak wiemy, pole równoległoboku na płaszczyźnie rozpiętego na wektorach $\vec{u} = [u_1, u_2], \vec{v} = [v_1, v_2]$ jest równe

$$P = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right| = |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \left| \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} u_i v_j \right|.$$

1 2 $\oplus u_1 v_2$
2 1 $\ominus u_2 v_1$

ii) Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ; (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & ; (i, j, k) \in \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\} \\ 0 & ; i = j \text{ lub } j = k \text{ lub } k = i \end{cases}$$

Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, gdzie $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3], \vec{v} = [v_1, v_2, v_3], \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$, jest równy

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \circ (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Można sprawdzić, że

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2(v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k.$$

$u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2$



iii) Niech $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3], \vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Iloczyn wektorów $\vec{u} \times \vec{v}$, to wektor $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ taki, że

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{1ij} u_i v_j,$$

$$w_2 = -u_1 v_3 + u_3 v_1 = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{2ij} u_i v_j,$$

$$w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{3ij} u_i v_j.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \hat{i} \cdot (\varepsilon_{123} u_2 v_3 + \varepsilon_{132} u_3 v_2) + \hat{j} \cdot (\varepsilon_{213} u_1 v_3 + \varepsilon_{231} u_3 v_1) + \hat{k} \cdot (\varepsilon_{312} u_1 v_2 + \varepsilon_{321} u_2 v_1) = \\ &= \hat{i} \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \hat{j} \cdot (-u_1 v_3 + u_3 v_1) + \hat{k} \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned}$$

$+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1$

iv) Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$. Wówczas

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Twierdzenie 5.2.5 (Własności symbolu całkowicie antysymetrycznego).¹⁶

i) $n = 2$

$$\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}, \quad \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} = \delta_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = 2$$

ii) $n = 3$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{kl} \\ \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \end{vmatrix}, \quad \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

$$\sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \quad \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3!$$

Przykład 5.2.6. Niech $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$. Wyznamy wektor $\vec{a} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. Jeśli $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, to na mocy twierdzenia 5.2.5 otrzymujemy

Handwritten notes: 2 zmienne, =, (+), l=2, m=1, j=2

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{1jk} u_j \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{klm} v_l w_m = \sum_{j,l,m=1}^3 u_j v_l w_m \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{1jk} \varepsilon_{klm} = \sum_{j,l,m=1}^3 u_j v_l w_m \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{1jk} \varepsilon_{lmk} = \\ &= \sum_{j,l,m=1}^3 u_j v_l w_m (\delta_{1l} \delta_{jm} - \delta_{1m} \delta_{jl}) = u_2 v_1 w_2 + u_3 v_1 w_3 - u_2 v_2 w_1 - u_3 v_3 w_1 = \\ &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) v_1 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) w_1 = \left(\sum_{j=1}^3 u_j w_j \right) v_1 - \left(\sum_{j=1}^3 u_j v_j \right) w_1 = (\vec{u} \circ \vec{w}) v_1 - (\vec{u} \circ \vec{v}) w_1 \end{aligned}$$

Handwritten notes: 1) l=2, m=1, j=2, -1, delta_12=0, delta_22=1

Handwritten notes: 2) l=3, m=2, j=2, delta_12=0

Handwritten notes: 3) l=1, m=2, j=2, delta_12=0

Analogicznie

$$a_2 = (\vec{u} \circ \vec{w}) v_2 - (\vec{u} \circ \vec{v}) w_2, \quad a_3 = (\vec{u} \circ \vec{w}) v_3 - (\vec{u} \circ \vec{v}) w_3.$$

Handwritten notes: u_j v_l w_m, u_2 v_2 w_1

Stąd

$$\vec{a} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = ((\vec{u} \circ \vec{w}) v_1 - (\vec{u} \circ \vec{v}) w_1, (\vec{u} \circ \vec{w}) v_2 - (\vec{u} \circ \vec{v}) w_2, (\vec{u} \circ \vec{w}) v_3 - (\vec{u} \circ \vec{v}) w_3) = (\vec{u} \circ \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \circ \vec{v}) \vec{w}.$$

¹⁶Aby udowodnić podane związki, w każdym wypadku należy porównać lewą i prawą stronę równania, wypisując wszystkie możliwości.

5.3 Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne i normalne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i prostopadłą do wektora $\vec{n}$. Wektor $\vec{n}$ nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny π .

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Równanie normalne: $\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Równanie ogólne: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0, D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Przykład 5.3.1. i) $P_0 = (1, 2, 5), \vec{n} = [1, -1, 3], P_0 \in \pi, \vec{n} \perp \pi, \pi = ?$

$$\pi : 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0 \text{ równanie normalne}$$

$$\pi : x - y + 3z - 14 = 0 \text{ równanie ogólne}$$

ii) Płaszczyzna Oxz opisana jest równaniem $y = 0$.

iii) Z równania płaszczyzny $\pi : x + z = 0$ możemy odczytać wektor normalny $\vec{n} = [1, 0, 1]$ oraz punkt należący do płaszczyzny $P_0 = (0, 0, 0)$.

Równanie parametryczne płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}, \vec{b} = [b_x, b_y, b_z] \neq \vec{0}$ ustalonymi wektorami niewspółliniowymi, tj. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Wówczas zbiór

$$\pi = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b}\}$$

jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektorów $\vec{a}, \vec{b}$. Mówimy, że wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są wektorami rozpinającymi płaszczyznę π .

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} + s\vec{b} \Leftrightarrow [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t[a_x, a_y, a_z] + s[b_x, b_y, b_z]$$

Równanie parametryczne: $\pi : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x + s \cdot b_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y + s \cdot b_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z + s \cdot b_z \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$

Przykład 5.3.2. i) Napiszemy równanie parametryczne i równanie ogólne płaszczyzny π przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, 5, 4)$ i równoległej do osi Oy .

$\overrightarrow{AB} = [1, 4, 0] \parallel \pi$, $\hat{j} = [0, 1, 0] \parallel Oy \Rightarrow \hat{j} \parallel \pi$, $A \in \pi$
Płaszczyznę π możemy opisać równaniem parametrycznym postaci

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot s = 1 + t \\ y = 1 + 4 \cdot t + 1 \cdot s = 1 + 4t + s \\ z = 4 + 0 \cdot t + 0 \cdot s = 4 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Wektor $\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \hat{j}$ jest wektorem normalnym płaszczyzny π . Znajdziemy jego współrzędne.

$$\overrightarrow{AB} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 1]$$

Równanie ogólne płaszczyzny π ma postać $\pi : 0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 4) = 0$, skąd $\pi : z = 4$.

ii) Zapiszemy równanie parametryczne płaszczyzny π danej równaniem ogólnym

$$\pi : x - y + 3z - 14 = 0.$$

Przyjmijmy $y = t$, $z = s$, wówczas

$$\pi : \begin{cases} x = t - 3s + 14 \\ y = t \\ z = s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Inne równania płaszczyzny

Równanie postaci $\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opisuje płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$. Jest to tzw. równanie odcinkowe płaszczyzny.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ma postać

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Istotnie, ponieważ $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1] \parallel \pi$ oraz $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \pi$, zatem

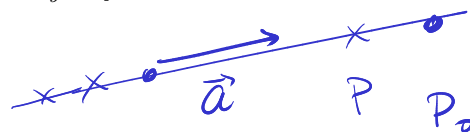
$$\pi = \{P = (x, y, z) : \overrightarrow{P_1P} \perp \vec{n}\} = \{P = (x, y, z) : [x - x_1, y - y_1, z - z_1] \circ \vec{n} = 0\}.$$

5.4 Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne i kierunkowe prostej

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym punktem, zaś $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] \neq \vec{0}$ ustalonym wektorem. Wówczas zbiór

$$l = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}\}$$



jest prostą przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{a}$ nazywamy wektorem kierunkowym prostej l .

$$P_0 \in l \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t a_x \\ y - y_0 &= t a_y \\ z - z_0 &= t a_z \end{aligned}$$

Równanie postaci $l : \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a_x \\ y = y_0 + t \cdot a_y \\ z = z_0 + t \cdot a_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ nazywamy równaniem parametrycznym prostej l .

Parametryzacja

Rugując z każdego z powyższych równań parametr t , otrzymujemy równanie postaci $l : \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$, które nazywamy równaniem kierunkowym prostej l .

Równanie krawędziowe prostej

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$ będą dwiema nierównoległymi płaszczyznami. Ich częścią wspólną jest prosta $l = \pi_1 \cap \pi_2$.

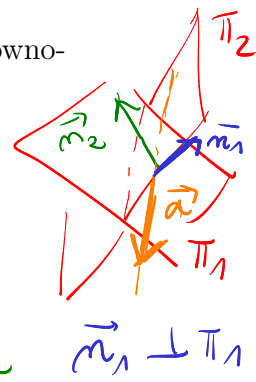
$$P \in l \Leftrightarrow (P \in \pi_1 \wedge P \in \pi_2)$$

Równanie krawędziowe: $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Przykład 5.4.1. Napisz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (2, 3, 1)$ i równoległej do płaszczyzn $\pi_1 : 6x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Oznaczmy $\vec{n}_1 = [6, -1, 1] \perp \pi_1$, $\vec{n}_2 = [1, 3, -2] \perp \pi_2$ oraz $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel l$.

$$\text{Wówczas } \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = [-1, 13, 19] \text{ oraz } l : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 13t \\ z = 1 + 19t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$



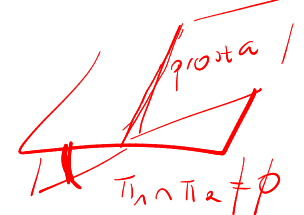
5.5 Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

Wzajemne położenie płaszczyzn

Niech $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = [A_1, B_1, C_1] \neq \vec{0}$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A_2, B_2, C_2] \neq \vec{0}$.



$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$$



Szukanie punktów wspólnych π_1 oraz π_2 polega na rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}.$$

Niech $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$.

Płaszczyzny mogą być równoległe.

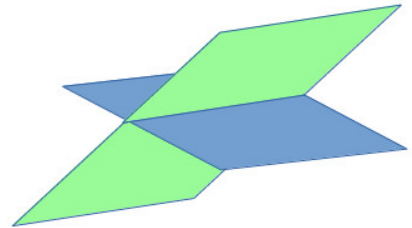
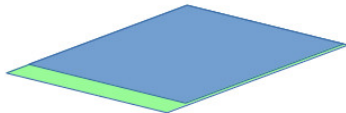
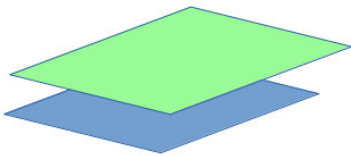
$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$$

Wówczas albo $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = r(A) = 1$

albo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, gdy $r(U) = 2, r(A) = 1$.

Gdy $r(U) = r(A) = 2$, płaszczyzny $\pi_1 \nparallel \pi_2$ przecinają się wzdłuż prostej. W szczególności mogą być prostopadłe.

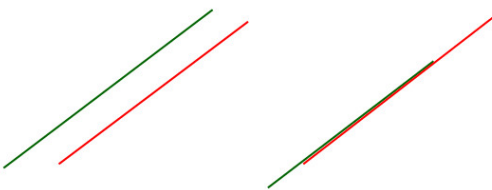
$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 0$$



Wzajemne położenie prostych

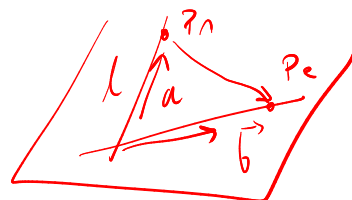
Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Proste mogą być równoległe. $l \parallel k \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
Wówczas albo $l = k$, albo $l \cap k = \emptyset$.



Gdy $l \nparallel k$, możliwe są dwie sytuacje.

1) Proste l i k leżą w jednej płaszczyźnie, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas l i k mają jeden punkt wspólny tj. $l \cap k = \{P\}$,

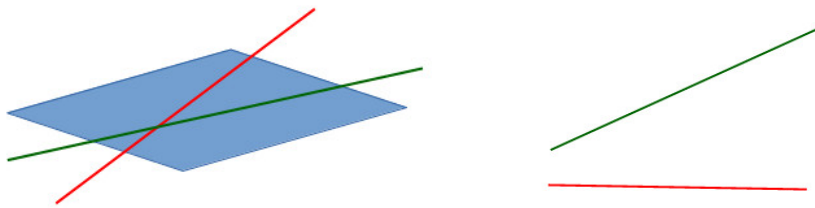


Tw. K. Jonckheera
Capodaglio



2) Proste l i k nie leżą w jednej płaszczyźnie (tzw. proste skośne), co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas $l \cap k = \emptyset$.

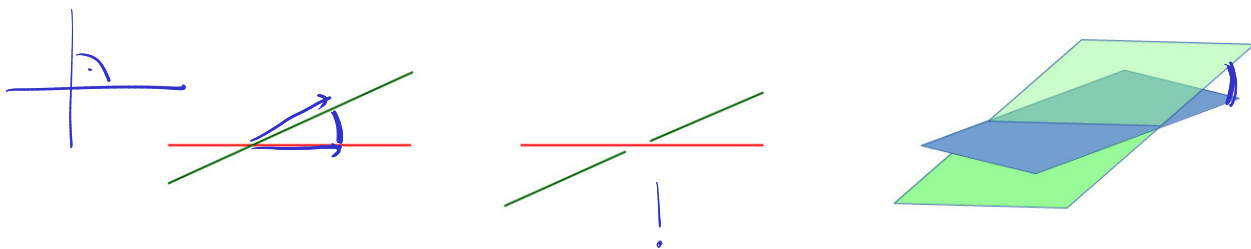
Zatem proste l i k są skośne wtedy i tylko wtedy gdy $(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.



Kąty

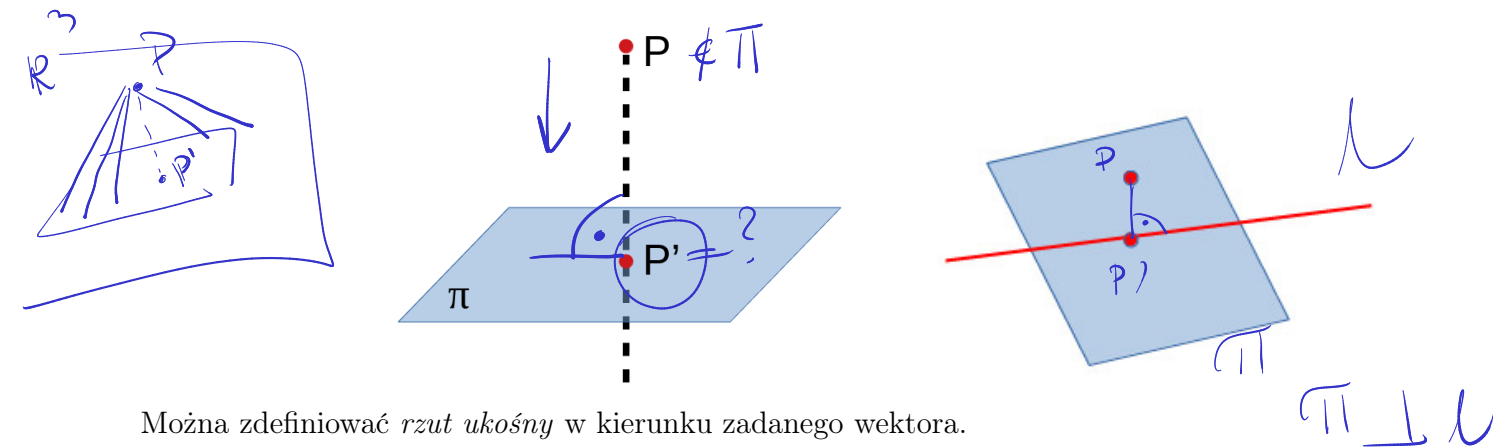
Definicja 5.5.1. i) Kątem między dwiema prostymi nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy proste są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami kierunkowymi tychże prostych.

ii) Kątem między dwiema płaszczyznami nazywamy kąt ostry (lub prosty, gdy płaszczyzny są prostopadłe) między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tychże płaszczyzn.



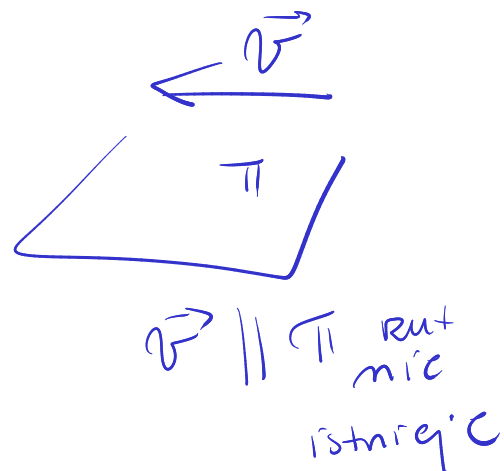
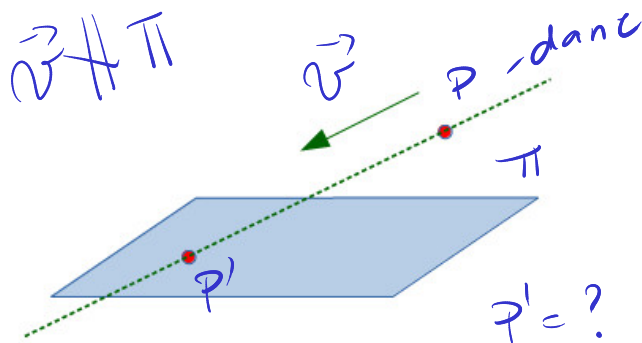
Definicja 5.5.2. i) Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt $P' \in \pi$ taki, że $PP' \perp \pi$.

ii) Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt $P' \in l$ taki, że $PP' \perp l$.



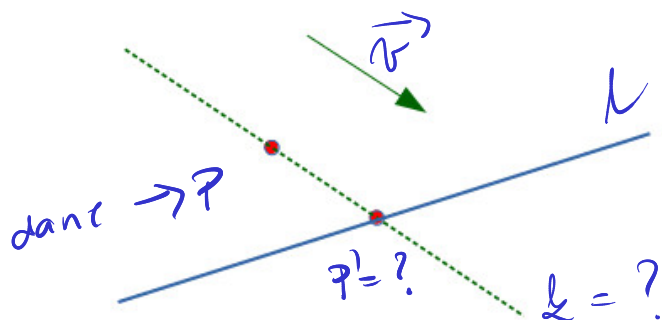
Można zdefiniować rzut ukośny w kierunku danego wektora.

Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora $\vec{v} \nparallel \pi$:



Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l :

Żeby był rzut skonstruować rzut nie istnieje



$$k \ni P$$

$$k \parallel \vec{v}$$

$$k \cap l = ?$$

$$= \{P'\}$$

Przykład 5.5.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

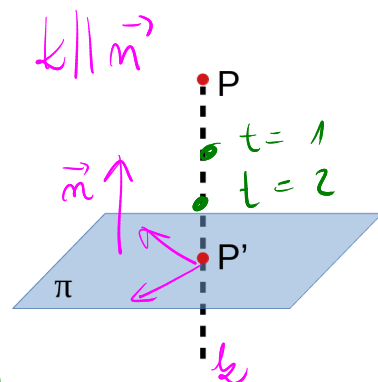
$$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \pi : -3(x - 2) - (y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

$$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$$

$$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$$



Definicja 5.5.4. Kątem między płaszczyzną a prostą nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.