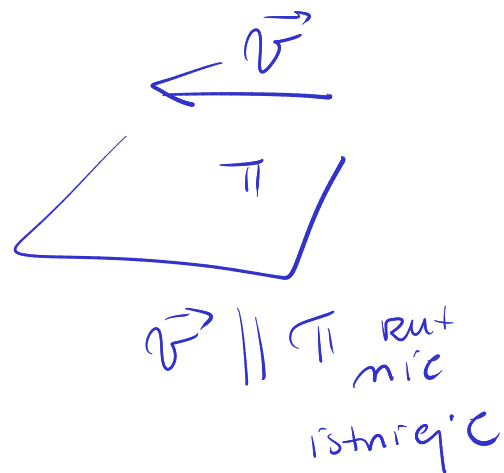
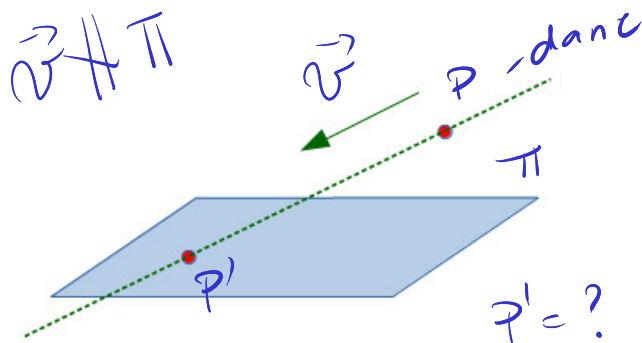
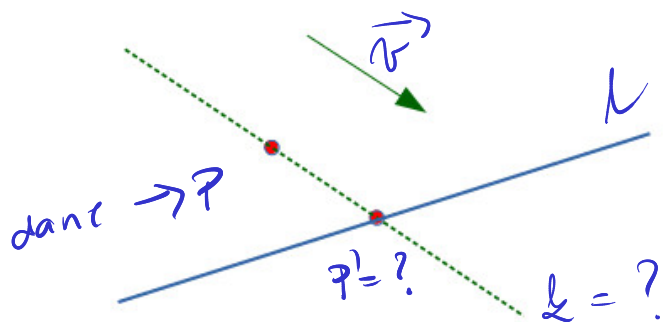




Rzut punktu P na prostą l w kierunku wektora $\vec{v}$, o którym zakładamy, że należy do płaszczyzny zawierającej P oraz l :

Żeby byłby skonstruować rzut nie istnieje



$k \ni P$
 $k \parallel \vec{v}$

$k \cap l = ?$
 $= \{P'\}$

Przykład 5.5.3. Wyznacz rzut prostokątny punktu $P = (4, 5, -3)$ na płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2t + s \\ y = 1 + 3s \\ z = 3 + t + s \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Niech k będzie prostą taką, że $k \perp \pi$, $P \in k$.

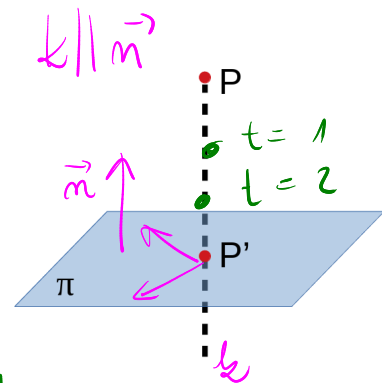
$$\vec{u} = [2, 0, 1] \parallel \pi, \quad \vec{v} = [1, 3, 1] \parallel \pi, \quad A = (2, 1, 3) \in \pi$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \perp \pi, \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-3, -1, 6], \quad k \perp \pi \Rightarrow k \parallel \vec{n}$$

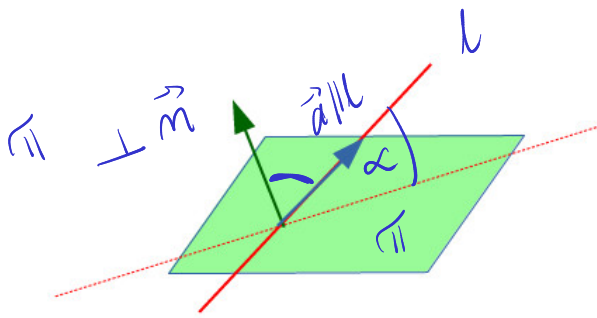
$$k : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 5 - t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \pi : -3(x - 2) - (y - 1) + 6(z - 3) = 0$$

$$\pi : 3x + y - 6z + 11 = 0 \quad \{P'\} = k \cap \pi = ?$$

$$3(4 - 3t) + 5 - t - 6(-3 + 6t) = 0 \Rightarrow t = 1, \quad P' = (1, 4, 3)$$



Definicja 5.5.4. Kątem między płaszczyzną a prostą nazywamy kąt o mierze $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to miara kąta ostrego (lub prostego, gdy prosta i płaszczyzna są równoległe) między odpowiednio zwróconym wektorem kierunkowym prostej a wektorem normalnym płaszczyzny.



$$\alpha = \angle(\vec{n}, \vec{a})$$

$$\beta = \angle(\vec{a}, \vec{m}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Przykład 5.5.5. Wyznacz kąt między prostą l :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

a płaszczyznę π : $3x + y + z + 1 = 0$.

Mamy $\vec{a} = [-1, 0, 2] \parallel l$, $\vec{n} = [3, 1, 1] \perp \pi$. Oznaczmy $\beta = \angle(\vec{n}, \vec{a})$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Obliczamy $\cos \beta \Rightarrow \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|-3+0+2|}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+0+4}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{55}}$,

albo $\sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{55}}$

Odległości

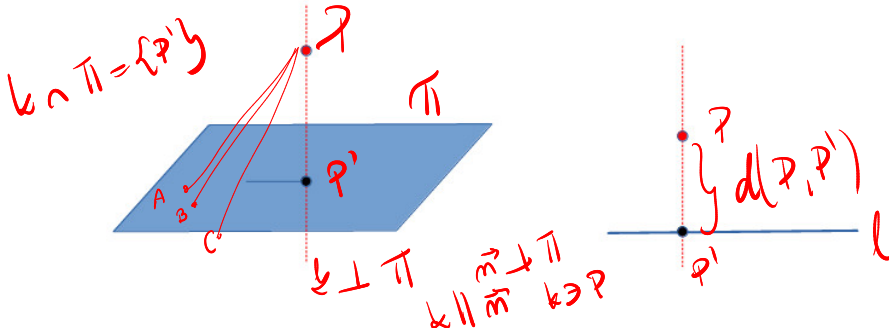
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$|\vec{n} \cdot \vec{a}| \leftarrow \text{moduł}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = |\vec{n}| \cdot |\vec{a}| \cos \beta$$

Definicja 5.5.6. i) *Odległością punktu P od płaszczyzny π , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na π . Oznaczamy ją $d(P, \pi)$.*

ii) *Odległością punktu P od prostej l , nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym P na l . Oznaczamy ją $d(P, l)$.*



d - distance

Wzór na odległość punktu od płaszczyzny

Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz π : $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n} = [A, B, C] \neq \vec{0}$. Wówczas

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$$

Istotnie, niech k będzie prostą taką, że $P_0 \in k$, $k \perp \pi$. Wówczas k :

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

$\{P'_0\} = k \cap \pi = ?$

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0, \quad t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$d(P, \pi) = |P_0 P'_0| = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} = |t| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wzór na odległość punktu od prostej

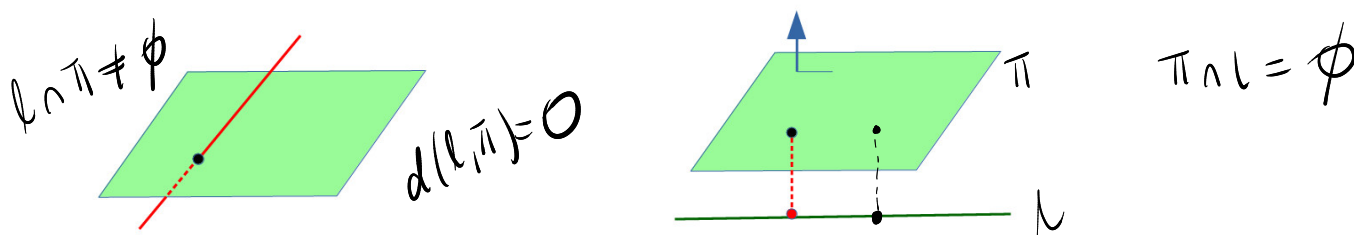
Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym $\vec{a}$. Wówczas

$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

zobacz
← długość podstawy
 $P_0 \notin l$
 $P_0 \in l$
 $d(P_0, l) = 0$

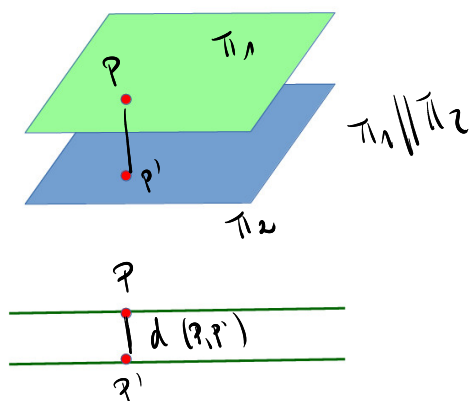
Odległość prostej od płaszczyzny

Jeśli prosta l nie przecina płaszczyzny π , to wówczas odległością prostej l od płaszczyzny π nazywamy odległość dowolnego punktu prostej od płaszczyzny.



Definicja 5.5.7. Odległością dwóch płaszczyzn (prostych) równoległych nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej.

Można wykazać, że dla płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = [A, B, C] \neq \vec{0}$ zachodzi wzór $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{|\vec{n}|}$.



$$|PP'| = d(\pi_1, \pi_2)$$

$$\pi_1 \parallel \pi_2$$

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

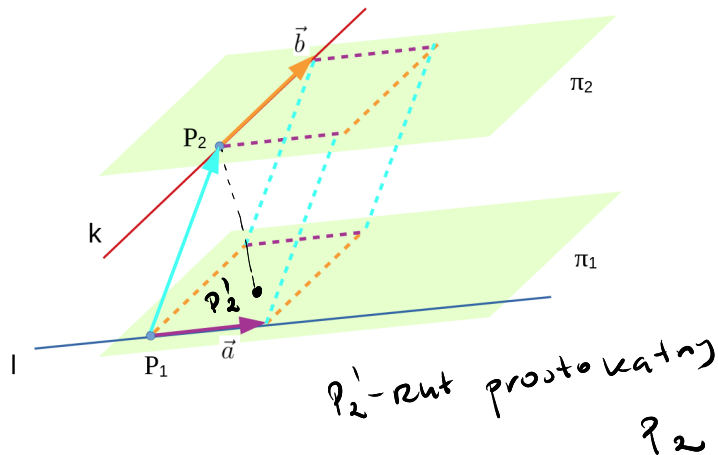
można przyjąć
 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$

Odległość prostych skośnych

Przypomnijmy, że jeśli dwie proste leżą w jednej płaszczyźnie, to przecinają się lub są równoległe. Proste, które nie są do siebie równoległe i nie mają punktów wspólnych nazywamy skośnymi. Zatem proste są skośne, gdy nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Niech $\vec{a}$ będzie wektorem kierunkowym prostej l , przechodzącej przez punkt P_1 , zaś $\vec{b}$ wektorem kierunkowym prostej k , przechodzącej przez punkt P_2 .

Założmy że proste te są skośne. Wówczas istnieją płaszczyzna π_1 zawierająca prostą l oraz płaszczyzna π_2 zawierająca prostą k takie, że $\pi_1 \parallel \pi_2$ oraz $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Ponadto płaszczyzny równoległe, na których leżą dane dwie proste skośne są wyznaczone jednoznacznie. Istotnie, π_1 jest płaszczyzną zawierającą l i równoległą do wektora $\vec{b}$. Jej wektorem normalnym jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Podobnie, π_2 jest płaszczyzną zawierającą k i równoległą do wektora $\vec{a}$. Jej wektorem normalnym również jest wektor $\vec{a} \times \vec{b}$.



Definicja 5.5.8. Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste.

Uwaga 5.5.9. Niech l i k będą jak wyżej. Założmy że proste te są skośne, co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wówczas

$$h = d(k, l) = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \quad \begin{array}{l} \text{odległość równoległościarny} \\ \text{Polec po dół} \end{array}$$

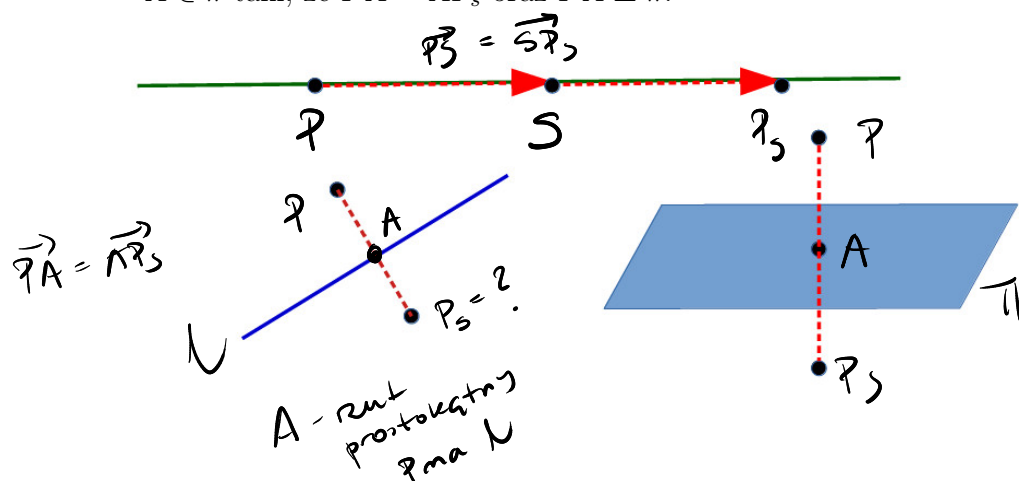
Przykładowe zadanie polegające na wyznaczaniu odległości dwóch prostych skośnych można znaleźć tutaj.

Symetrie

Definicja 5.5.10. Niech S będzie ustalonym punktem, l ustaloną prostą oraz π ustaloną płaszczyzną.

- Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem punktu S , jeżeli $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SP_s}$.
- Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem prostej l , jeżeli istnieje $A \in l$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp l$.

- iii) Punkt P_s jest punktem symetrycznym do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli istnieje $A \in \pi$ taki, że $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP_s}$ oraz $\overrightarrow{PA} \perp \pi$.



brawolacja
(przesunięcie)

$P_s = T_{\overrightarrow{PA}}(A)$ brawolacja punktu A
o wektor $\overrightarrow{PA}$

TEMAT: Przestrzenie liniowe



6.1 Przestrzenie liniowe i ich podprzestrzenie

Niech $K = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$, zaś $V \neq \emptyset$ zbiorem. Niech dane będzie działanie wewnętrzne $\oplus : V \times V \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in V$ oraz działanie zewnętrzne $\odot : K \times V \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in V$.

skalar wektor *wektor* *wektor* *wektor*
Definicja 6.1.1. Zespół $V = (V, \oplus, K, \odot)$ taki, że

i) $(V, \oplus)$ jest grupą abelową,

ii) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

iv) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

v) $\forall v \in V \quad 1 \odot v = v$

nazywamy przestrzenią wektorową bądź przestrzenią liniową nad ciałem K (albo przestrzenią K -liniową). Elementy zbioru V nazywamy wektorami, zaś elementy ciała K skalarami.

Przykład 6.1.2. Poniższe struktury są przestrzeniami wektorowymi.

i) $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$

Dla $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy
 $u \oplus v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \alpha \odot u = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n).$

ii) $(K^n, \oplus, K, \odot)$, gdzie $K = (K, +, \cdot)$ to dowolne ciało

Dla $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ oraz $\alpha \in K$ definiujemy
 $u \oplus v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \alpha \odot u = (\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n).$

iii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Dla $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy

$f_3 = f_1 \oplus f_2$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = (f_1 \oplus f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$

oraz $f_4 = \alpha \odot f_1$ takie, że $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_4(x) = (\alpha \odot f_1)(x) := \alpha \cdot f_1(x)$

Elementem neutralnym działania $\oplus$ jest funkcja stałe równa zero.

iv) $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = (M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie działania $+, \cdot$ to działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę.

$$B^A = \{f : A \rightarrow B\}$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

v) $\mathbb{R}[x] = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, gdzie $\mathbb{R}[x]$ to zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez liczbę.

Uwaga 6.1.3. Często tym samym symbolem oznaczamy działania w ciele $K = (K, +, \cdot)$ i działania w przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$.

Wówczas dla $u, v \in V, \alpha, \beta \in K$

$u + v$	suma wektorów
$\alpha + \beta$	suma skalarów
$\alpha \cdot u$	iloczyn wektora przez skalar
$\alpha \cdot \beta$	iloczyn skalarów

$$2 \cdot 3 \quad 2 \cdot \vec{v}$$

$$u \oplus v \quad \vec{u} + \vec{v} \quad 2 + 3$$

Twierdzenie 6.1.4. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową. Niech $\mathbf{0}$ oznacza element neutralny dodawania w V , zaś $0, 1$ elementy neutralne działań w ciele K . Wówczas:

- i) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \underline{0 \cdot v = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}}$
- ii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \underline{\alpha \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee v = \mathbf{0})}$
skalar wektor
- iii) $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$
- iv) $\forall v \in V \quad \underline{-1 \cdot v = -v}$
- v) $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha - \beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) - (\beta \cdot v)$
- vi) $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (u - v) = (\alpha \cdot u) - (\alpha \cdot v)$

$$\vec{0} \quad \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{0}_K \quad \mathbf{0}_V$$

wzależności

Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $K = (K, +, \cdot)$ i niech $U \subset V$ będzie niepustym podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.1.5. Jeśli zbiór U wraz z działaniami

$\oplus|_{U \times U} : U \times U \ni (u, v) \mapsto u \oplus v \in U, \odot|_{K \times U} : K \times U \ni (\alpha, v) \mapsto \alpha \odot v \in U$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to $U = (U, \oplus|_{U \times U}, K, \odot|_{K \times U})$ nazywamy *podprzestrzenią wektorową* lub *podprzestrzenią liniową* przestrzeni V .

Twierdzenie 6.1.6. Jeśli $V = (V, \oplus, K, \odot)$ jest przestrzenią wektorową oraz $\emptyset \neq U \subset V$, to wówczas U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad \underline{u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U}$$

lub równoważnie

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \underline{(\alpha \odot u_1) \oplus (\beta \odot u_2) \in U}$$

Dowód. Implikacja z prawa na lewo jest oczywista. Implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że U jest podgrupą grupy V . $\square$

Uwaga 6.1.7. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową. Wówczas $U = \{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową. Nazywamy ją *podprzestrzenią trywialną*. Podobnie $U = V$ jest podprzestrzenią liniową V . Podprzestrzenie te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*.

Uwaga 6.1.8. Każda podprzestrzeń liniowa zawiera wektor zerowy.

Dowód. Jeśli U jest podprzestrzenią liniową, to $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha \in K \quad u_1 \oplus u_2 \in U \wedge \alpha \odot u_1 \in U$.
W szczególności $-1 \odot u_1 = -u_1 \in U$ oraz $u_1 \oplus (-u_1) = \mathbf{0} \in U$. $\square$

Wniosek 6.1.9. Niech $V = (V, \oplus, K, \odot)$ będzie przestrzenią liniową, zaś $U \subset V$ podzbiorem V . Jeśli $\mathbf{0} \notin U$, to U nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V .

Przykład 6.1.10.

i) $V = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$

U jest podprzestrzenią liniową V , bowiem suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą oraz iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest funkcją ciągłą.

ii) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \text{ parzysty}\}$

$\uparrow$ wielomian

degree

U nie jest podprzestrzenią liniową V . Niech $f(x) = x^4 + x^3$ oraz $g(x) = -x^4$. Wówczas $(f+g)(x) = x^3$. Zatem $f, g \in U$, ale $f+g \notin U$.

KONTROPRZYKŁAD

iii) $V = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + z - 3t = 0 \wedge y = 0\}$

U jest podprzestrzenią liniową V . Skoro $z = 3t - 2x$ oraz $y = 0$, zatem dowolny element $u \in U$ jest postaci $u = (x, 0, 3t - 2x, t)$. Weźmy $u_1 = (x_1, 0, 3t_1 - 2x_1, t_1) \in U$, $u_2 = (x_2, 0, 3t_2 - 2x_2, t_2) \in U$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas

$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, 0, 3(t_1 + t_2) - 2(x_1 + x_2), t_1 + t_2) \in U$

oraz $\alpha u_1 = (\alpha x_1, 0, \alpha(3t_1 - 2x_1), \alpha t_1) = (\alpha x_1, 0, 3\alpha t_1 - 2\alpha x_1, \alpha t_1) \in U$

do order

iv) $V = (\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $U = \mathbb{R}_n[x] := \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq n\}$.

Przyjmujemy, że $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Wówczas U jest podprzestrzenią liniową V .

TAK podprzestrzeń

f i g wielomiany

Zatem $\mathbb{R}_n[x]$ to przestrzeń liniowa wielomianów stopnia co najwyżej n -tego.¹⁷

Podprzestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

$$\deg(f \cdot g) = 5$$

$$= \deg f + \deg g$$

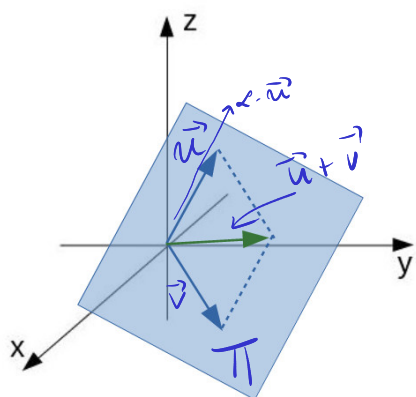
$$\deg f = 2 \quad x^2 + 10$$

$$\deg g = 3 \quad x^3 - 1$$

Jedynymi właściwymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez $(0,0)$.

Jedynymi właściwymi podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^3$ są płaszczyzny i proste przechodzące przez $(0,0,0)$.

¹⁷Niektórzy autorzy stosują również oznaczenie $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.



$$\vec{u}, \vec{v} \in \pi \quad \vec{u} + \vec{v} \in \pi$$

$$\alpha \cdot \vec{u} \in \pi$$

6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in V$. Niech $W \neq \emptyset$ będzie podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K; w_1, \dots, w_k \in W; k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W , nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\text{lin}_K W$ lub krótko $\text{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ piszemy też $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\}$. Czyli $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\emptyset \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\text{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W .

Wniosek 6.2.3. Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{u, v_2, \dots, v_m\}$.

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\text{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\text{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W .

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{i} = (1, 0)$ oraz $\hat{j} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$.

$$\vec{u} = (2, 5) = (2, 0) + (0, 5) = 2 \cdot (1, 0) + 5 \cdot (0, 1)$$

$$2 \cdot \hat{i} + 5 \cdot \hat{j}$$

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K .

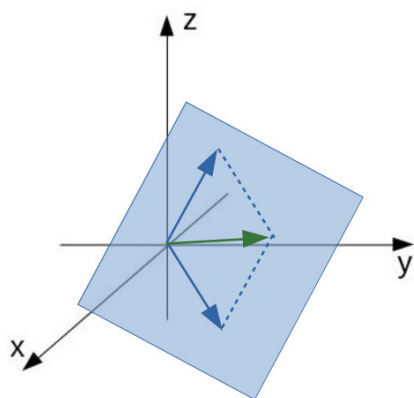
Definicja 6.2.6. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ nazywamy liniowo niezależnymi lub mówimy, że tworzą układ liniowo niezależny, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ zachodzi

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy liniowo zależnymi.

Twierdzenie 6.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy, że wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne, czyli istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ nie wszystkie równe zeru, takie że $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$. Załóżmy teraz, że v_1 jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$, czyli istnieją $\beta_2, \dots, \beta_m \in K$ takie, że $v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m$. Wówczas $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0}$, gdzie $\beta_1 = -1 \neq 0$. $\square$



stop

Twierdzenie 6.2.8. Wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A , której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \dots, v_k$, jest równy n .

Wniosek 6.2.9. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

Przykład 6.2.10. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(5, 2, 2) = (\alpha + 2\beta + 5\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + 2\gamma)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$