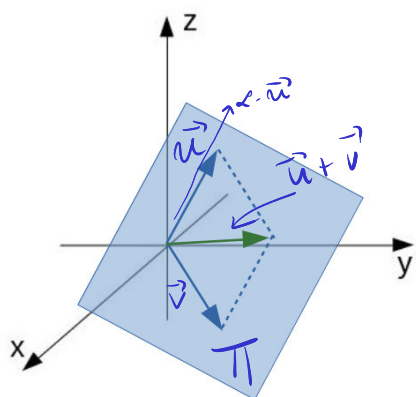
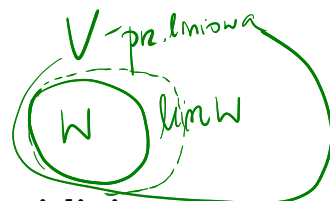




$$\vec{u}, \vec{v} \in \Pi \quad \vec{u} + \vec{v} \in \Pi$$

$$\alpha \cdot \vec{u} \in \Pi$$



6.2 Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in V$. Niech $W \neq \emptyset$ będzie podzbiorem zbioru V .

Definicja 6.2.1. i) Wektor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \in V$ nazywamy *kombinacją liniową* wektorów $v_1, \dots, v_m \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

ii) Jeśli $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$, mówimy, że jest to *kombinacja zerowa*.

iii) Kombinację liniową $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ nazywamy *kombinacją trywialną* wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.

iv) Zbiór $\{v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K; w_1, \dots, w_k \in W; k \in \mathbb{N}\}$, będący zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych układów wektorów w zbiorze W , nazywamy *powłoką liniową* zbioru W i oznaczamy symbolem $\text{lin}_K W$ lub krótko $\text{lin} W$.

Gdy W jest zbiorem skończonym $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ piszemy też $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\}$. Czyli $\text{lin}\{w_1, \dots, w_m\} = \{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

Twierdzenie 6.2.2. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ oraz $\emptyset \neq W \subset V$. Wówczas zbiór $\text{lin} W$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V . Jest to najmniejsza (w sensie relacji inkluzji) podprzestrzeń V zawierająca zbiór W .

Wniosek 6.2.3. Jeśli $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ oraz $\lambda_1 \neq 0$, to wówczas $\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{u, v_2, \dots, v_m\}$.

Definicja 6.2.4. Elementy zbioru W nazywamy *generatorami* przestrzeni $\text{lin} W$, zaś podprzestrzeń $\text{lin} W$ nazywamy podprzestrzenią *generowaną* przez zbiór W .

Przykład 6.2.5. Wersory $\hat{i} = (1, 0)$ oraz $\hat{j} = (0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$, bowiem dla dowolnego $\vec{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\vec{u} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j}$.

$$\vec{u} = (2, 5) = (2, 0) + (0, 5) = 2 \cdot (1, 0) + 5 \cdot (0, 1)$$

$$2 \cdot \hat{i} + 5 \cdot \hat{j}$$

$i+j=(1,1)$

$\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{i, j\}$
 $\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{i, i+j\}$

$\vec{u} = 2i + 5j$
 $\vec{u} = \alpha i + \beta(i+j)$
 $= (2,0) + (\beta, \beta) = (2+\beta, \beta)$
 $\alpha = -3$

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K .

Definicja 6.2.6. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ nazywamy liniowo niezależnymi lub mówimy, że tworzą układ liniowo niezależny, gdy każda kombinacja zerowa jest trywialna, to znaczy jeśli dla dowolnych skalarów $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ zachodzi

$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$

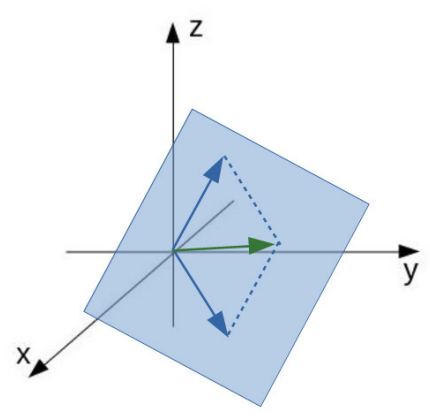
Wektory, które nie są liniowo niezależne, nazywamy liniowo zależnymi.

$u = 2i + 5j + 0(i+j)$

$5 \cdot (1,1) - 3 \cdot (1,0) = (2,5)$

Twierdzenie 6.2.7. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Wektory $v_1, \dots, v_m \in V$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. Załóżmy, że wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne, czyli istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ nie wszystkie równe zeru, takie że $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\alpha_1 \neq 0$. Wówczas $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$. Załóżmy teraz, że v_1 jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$, czyli istnieją $\beta_2, \dots, \beta_m \in K$ takie, że $v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m$. Wówczas $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = \mathbf{0}$, gdzie $\beta_1 = -1 \neq 0$. $\square$



$n = \mathbb{R}$

stop

Twierdzenie 6.2.8. Wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A , której kolejne wiersze to współrzędne wektorów $v_1, \dots, v_k$, jest równy n .

Wniosek 6.2.9. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ generują $\mathbb{R}^n$, to $k \geq n$.

przynajmniej n badziwosci

Przykład 6.2.10. Czy wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$?

Sprawdzamy, czy dla dowolnego $b = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1) + \beta(2, 1, 0) + \gamma(5, 2, 2) = (\alpha + 2\beta + 5\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + 2\gamma)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

↑ szukane ↑ dane

$\alpha = ?$
 $\beta = ?$
 $\gamma = ?$ niemożliwe

Wektory generują $\mathbb{R}^3$, jeśli powyższy układ jest oznaczony.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \end{array} \right] \xrightarrow[w_3+w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 2 & 7 & z+x \end{array} \right] \xrightarrow[(-1) \cdot w_2]{w_3+2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & -x+2y+z \end{array} \right]$$

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + 5 \cdot z = x$$

$$1 \cdot y + 3 \cdot z = x - y$$

Układ oznaczony, posiada rozwiązanie $\gamma = -x + 2y + z$, $\beta = x - y - 3\gamma = 4x - 7y - 3z$, $\alpha = x - 2\beta - 5\gamma = -2x + 4y + z$. Zatem układ wektorów u, v, w generuje $\mathbb{R}^3$.

Przykład 6.2.11. Czy układ $\{A, B, C\}$ jest układem liniowo niezależnym?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Sprawdzamy, czy dowolna kombinacja zerowa jest trywialna.

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathbf{0}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Stąd } \begin{bmatrix} \alpha - \beta & -\alpha \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta = \alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

Zatem macierze A, B, C tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 6.2.12. Czy wektory $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 2, 0, -1)$, $w = (0, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne?

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ będą dowolne takie, że $\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$.

Stąd $(\alpha + \beta, 2\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + 3\gamma, 4\alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0)$.

Wektory u, v, w będą liniowo niezależne, gdy powyższy układ jednorodny ma jedyne rozwiązanie $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_4-4w_1]{w_2-2w_1, w_3-3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}w_4]{-\frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow r(U) = r(A) = n = 3$$

Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego układ jest oznaczony. Zatem wektory u, v, w są liniowo niezależne.

Obserwacja: Badanie liniowej niezależności wektorów w $\mathbb{R}^n$ polega na wyliczaniu rzędu macierzy, której kolumnami są podane wektory. Wektory są liniowo niezależne, gdy rząd macierzy równy jest liczbie wektorów.

Wniosek 6.2.13. Niech $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Jeśli $k > n$, to wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo zależne. Równoważnie, jeśli wektory $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne, to $k \leq n$.

Twierdzenie 6.2.14. Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

i) Układ $\{v\}$, $v \in V$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $v = \mathbf{0}$.

$$\alpha \cdot u = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$$

74

$$u = \vec{0} \quad \alpha \cdot u = \vec{0} \quad \text{dla dowolnego } \alpha$$

$u, v, u+v$?

ii) Układ wektorów zawierający podukład liniowo zależny jest liniowo zależny.

iii) Jeśli układ wektorów jest liniowo niezależny, to każdy jego podukład jest liniowo niezależny.

iv) Układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

$\vec{u} = (0, 0)$ $\vec{v} = (1, 1)$ $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \vec{v} = (0, 0) \neq \alpha = 0 \wedge \beta = 0$

lin. niezależny
lin. zależny

Definicja 6.2.15. Niech $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Macierz $W(x)$ postaci

$$W_{f_1, \dots, f_n}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Analiza
(2 sem?)
równania
rozstrzygane

nazywamy *macierzą Wrońskiego* układu funkcji $f_1, \dots, f_n$, a jej wyznacznik *wrońskianem*.

Twierdzenie 6.2.16. Niech $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Jeśli wrońskian układu funkcji $f_1, \dots, f_n$ nie zeruje się tożsamościowo na $\mathbb{R}$, tzn. $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \det W_{f_1, \dots, f_n}(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $C(\mathbb{R})$.

Przykład 6.2.17. Zbadaj, czy funkcje f_1, f_2, f_3 takie, że $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$, tworzą układ liniowo niezależny w $C(\mathbb{R})$.

METODA I: Skorzystamy wprost z definicji liniowej niezależności. Niech $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ będą takie, że $C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza funkcję tożsamościowo równą zero.

Skoro $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, zatem w szczególności równość jest prawdziwa dla $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ oraz $x = \pi$. Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$C_1 + C_3 = 0 \quad \wedge \quad C_1 + C_2 = 0 \quad \wedge \quad C_1 - C_3 = 0.$$

Stąd $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, a zatem układ funkcji f_1, f_2, f_3 jest liniowo niezależny.

Analiza
III sem
szereg Fouriera

METODA II: Skorzystamy z kryterium wrońskianowego opisanego w twierdzeniu 6.2.16.

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$$

Tak, tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład 6.2.18. Układ wektorów $\hat{i} = (1, 0), \hat{j} = (0, 1), \hat{i} + \hat{j} = (1, 1)$ generuje przestrzeń $\mathbb{R}^2$, to jest $\mathbb{R}^2 = \text{lin}\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{i} + \hat{j}\}$.

Rozważmy wektor $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Zauważmy, że

$$v = 1 \cdot \hat{i} + 2 \cdot \hat{j}, \quad v = 1 \cdot \hat{j} + 1 \cdot (\hat{i} + \hat{j}).$$

Wektor v jest kombinacją liniową generatorów przestrzeni $\mathbb{R}^2$, lecz przedstawienie to nie jest jednoznaczne. ¹⁸

Wyróżnimy układy wektorów generujących daną przestrzeń liniową o tej własności, że dowolny wektor z tej przestrzeni przedstawia się jednoznacznie jako ich kombinacja liniowa.

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$.

Definicja 6.2.19. Układ wektorów $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ nazywamy bazą przestrzeni V jeśli jest on liniowo niezależny oraz $V = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Wniosek 6.2.20. Jeśli wektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to wówczas $k = n$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy wniosków 6.2.9 oraz 6.2.13. $\square$

Przykład 6.2.21. Baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Układ wektorów $\{e_1, \dots, e_n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Przykład 6.2.22. Wskaż bazę podprzestrzeni U przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli $U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (3, 4, 1, 3)\}$.

Podane generatory na pewno nie tworzą bazy U , gdyż układ 5 wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest liniowo zależny.

4×5

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \leq 4 \neq 5$$

Transponujcie

$$r \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$3 \Rightarrow U = \text{lin}\{(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)\}$$

Układ wektorów $(1, 3, 2, 1), (0, -1, -1, 0), (0, -1, 0, 0)$ jest bazą przestrzeni U (porównaj wniosek 6.2.3).

¹⁸Istnieje więcej niż jeden sposób przedstawienia wektora v jako kombinacji liniowej wektorów $\hat{i}, \hat{j}, \hat{i} + \hat{j}$.

Twierdzenie 6.2.23. i) Każda przestrzeń wektorowa różna od $\{0\}$ posiada bazę.

- ii) Wszystkie bazy danej przestrzeni wektorowej są równoliczne. Jeśli baza danej przestrzeni liniowej jest nieskończona, to każda inna jej baza także jest nieskończona.
- iii) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być uzupełniony do jej bazy.

Twierdzenie 6.2.24. (Warunki równoważne do bycia bazą przestrzeni wektorowej)

Niech $V = (V, +, K, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Niech $b_1, \dots, b_n \in V$. Następujące warunki są równoważne.

→ generowanie + lin. niezależność

- i) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest bazą przestrzeni V .
- ii) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest minimalnym (w sensie relacji inkluzji) układem generującym V .
- iii) Układ wektorów $b_1, \dots, b_n$ jest maksymalnym (w sensie relacji inkluzji) układem liniowo niezależnym w tej przestrzeni.
- iv) Dowolny wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie jako kombinacja liniowa elementów $b_1, \dots, b_n$.

wymiar dimension

$$u = (2, 5) = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$
$$x\hat{i} + y\hat{j} = u$$

Definicja 6.2.25. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej $V = (V, +, K, \cdot)$ nazywamy wymiarem przestrzeni wektorowej V i oznaczamy $\dim_K V$ lub krótko $\dim V$. Mówimy wówczas, że przestrzeń V jest n -wymiarowa. Jeśli żaden skończony układ wektorów nie tworzy bazy przestrzeni V , to przyjmujemy $\dim V = \infty$. Ponadto przyjmujemy $\dim\{0\} = 0$.

$$\begin{matrix} x=2 \\ y=5 \end{matrix}$$

Wniosek 6.2.26. i) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ m wektorów, gdzie $m > n$ jest liniowo zależny.

- ii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każdy układ n wektorów liniowo niezależnych stanowi bazę tej przestrzeni.
- iii) W przestrzeni liniowej n -wymiarowej każde n wektorów generujących tę przestrzeń stanowi jej bazę.

*znajdę
dla $m > n$
wystarczy
sprawdzić
jeden
z dwóch
warunków
na bycie
bazą*

Przykład 6.2.10 - raz jeszcze

Wiemy, że wektory $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (5, 2, 2)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponadto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, zatem układ $\{u, v, w\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Wniosek 6.2.27. Wektory $v_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$, $v_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$, $\dots$, $v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn})$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wtedy i tylko wtedy gdy $\det[v_{ij}] \neq 0$.

Dowód. Tezę otrzymujemy na mocy twierdzeń 6.2.8 oraz 6.2.26 iii). $\square$

razd = n

Wniosek 6.2.28. i) Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dwa dowolne wektory niewspółliniowe tworzą jej bazę.

ii) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ trzy dowolne wektory niewspółpłaszczyznowe tworzą jej bazę.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ jej bazą.

Definicja 6.2.29. Uporządkowany ciąg wektorów bazowych $(b_1, \dots, b_n)$ nazywamy *reperem bazowym* lub *bazą uporządkowaną*.

Często mówimy po prostu o *bazie*, zaznaczając w zapisie uporządkowanie wektorów bazowych, np. poprzez ich ponumerowanie.

Bazy standardowe (kanoniczne) wybranych przestrzeni liniowych

1) $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^n = (e_1, \dots, e_n)$, gdzie $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$

2) $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots)$, $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$, $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_s \cdot x^s$

3) $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$, $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$

dla dowolnego $p \in \mathbb{R}_n[x]$ mamy $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$

4) $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{mn})$, gdzie $E_{kl} = [e_{ij}^{kl}]$, zaś $e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & (i, j) = (k, l) \\ 0 & (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$

$\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

Przykład 6.2.30. Bazą $M_2(\mathbb{R})$ jest układ $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdzie

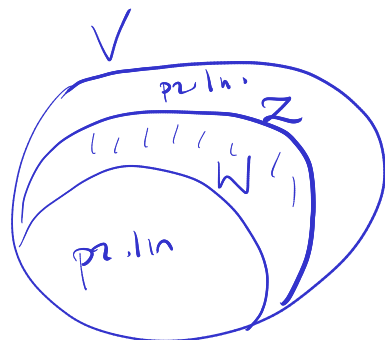
$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dla dowolnej macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.

Twierdzenie 6.2.31. Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas

i) $W \neq V \Rightarrow \dim W < \dim V$,

ii) $\dim W = \dim V < \infty \Rightarrow W = V$.



Przykład 6.2.32. Podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$.

	$\dim \mathbb{R} = 1$ podprzestrzenie $\mathbb{R}$	$\dim \mathbb{R}^2 = 2$ podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$	$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$
wymiaru 0	$\{0\}$	$\{(0, 0)\}$	$\{(0, 0, 0)\}$
wymiaru 1	$\mathbb{R}$	proste przechodzące przez $(0, 0)$	proste przechodzące przez $(0, 0, 0)$
wymiaru 2		$\mathbb{R}^2$	płaszczyzny przechodzące przez $(0, 0, 0)$
wymiaru 3			$\mathbb{R}^3$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jej bazą uporządkowaną. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieją skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Można uzasadnić, że przy ustalonym reperze bazowym skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 6.2.33. Skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ takie, że $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ nazywamy *współrzędnymi* wektora v w bazie $\mathcal{B}$. Piszemy wówczas $v = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]_{\mathcal{B}}$.

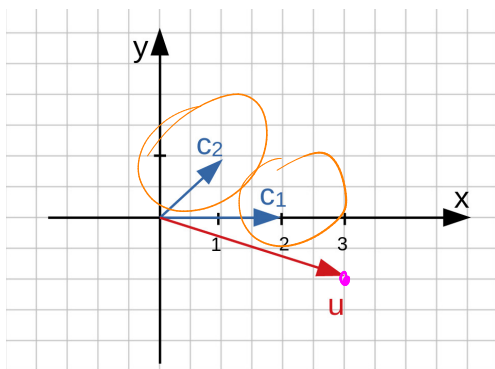
NOTACJA: Dla $v \in \mathbb{R}^n$ będziemy pisać $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ zamiast $u = [v_1, v_2, \dots, v_n]_{\mathcal{B}_k^n}$.

Przykład 6.2.34. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

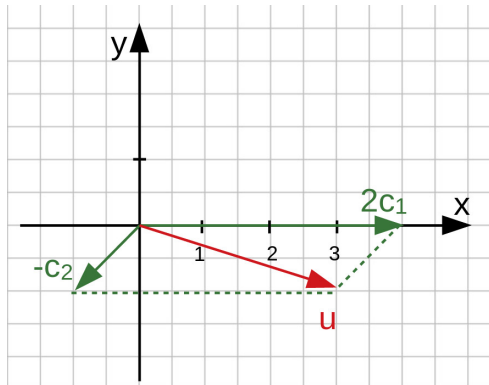
$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2)$, gdzie $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ to baza kanoniczna.

$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 = (2, 0), c_2 = (1, 1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$$u = [2, -1]_{\mathcal{C}} = 2c_1 - c_2 = 2 \cdot (2, 0) - (1, 1) = (3, -1) = \alpha(2, 0) + \beta(1, 1)$$



$$\vec{u} = (3, -1)$$



Przykład 6.2.35. $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$\mathcal{B}_k^2 = (e_1, e_2)$, gdzie $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ to baza kanoniczna.

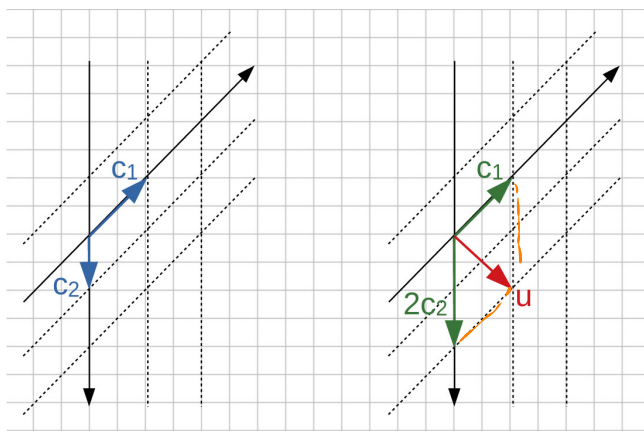
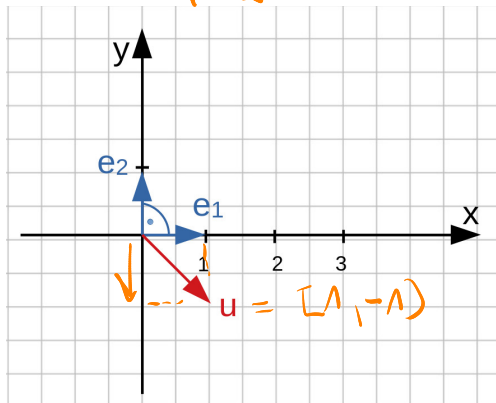
$\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 = (1, 1)$, $c_2 = (0, -1)$ to inna baza $\mathbb{R}^2$.

$u = (1, -1)$ oraz $u = [\alpha, \beta]_{\mathcal{C}}$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

$$(1, -1) = \alpha c_1 + \beta c_2 = \alpha(1, 1) + \beta(0, -1) = (\alpha, \alpha - \beta)$$

Stąd $\alpha = 1$, $\beta = 2$ oraz $u = [1, 2]_{\mathcal{C}}$.

$$1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2$$



Przykład 6.2.36. $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$

Skalary 4, 2, 1 to współrzędne b'_1 w bazie kanonicznej.

Piszemy $b'_1 = (4, 2, 1)$ zamiast $b'_1 = [4, 2, 1]_{\mathcal{B}_k^3}$.

Ponadto $b'_1 = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$ $= 1 \cdot b'_1 + 0 \cdot b'_2 + 0 \cdot b'_3$

Niech $v = (-3, 15, 7) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczmy współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}'$.

Niech $v = [\alpha, \beta, \gamma]_{\mathcal{B}'}$, tzn. $v = \alpha b'_1 + \beta b'_2 + \gamma b'_3$. Otrzymujemy

$(-3, 15, 7) = \alpha(4, 2, 1) + \beta(-5, 2, 3) + \gamma(1, 3, 0) = (4\alpha - 5\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 3\beta)$. Aby wyznaczyć współrzędne α, β, γ , należy rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & -5 & 1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 4w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array} \right] \xrightarrow{-4 \cdot w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 16 & -12 & -4 \\ 0 & -17 & 1 & -31 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{-1 \cdot w_2 \\ w_3 \leftrightarrow w_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & -1 & -11 & -35 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & -188 & -564 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{188} \cdot w_3} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 11w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow v = [1, 2, 3]_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema

"stara"

80

baza

"nowa"

baza

bazami. Wówczas istnieją skalary $\alpha_{ij} \in K$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że

$$\begin{aligned} b'_1 &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \dots + \alpha_{n1}b_n \\ b'_2 &= \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{n2}b_n \\ &\vdots \\ b'_n &= \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \dots + \alpha_{nn}b_n \end{aligned}$$

$b'_1 \in V$
↑ kombin.
 $b_1, \dots, b_n$

Definicja 6.2.37. Macierz $P \in M_n(K)$ postaci

$$P = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

w kolumnach
pa współrzędne
wektorów z nowej
bazy w starej
bazie

nazywamy *macierzą przejścia* od bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Oznaczamy ją symbolem $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Macierz przejścia $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ zawsze jest nieosobliwa. Wynika to z faktu, że wektory bazy $\mathcal{B}'$ są liniowo niezależne.

$\det P \neq 0$

Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy

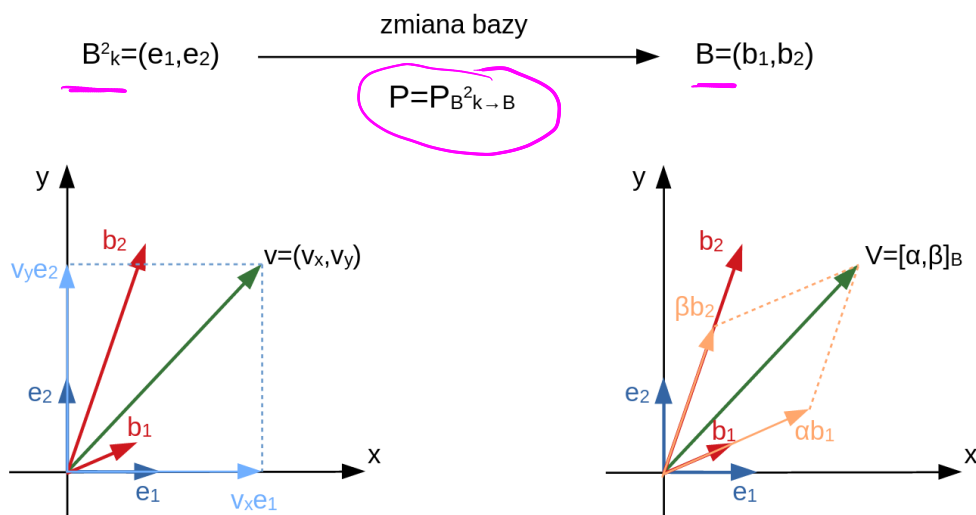
Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ oraz $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jej dwiema bazami. Niech $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Twierdzenie 6.2.38. Niech $v \in V$, $v = [x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{B}} = [x'_1, \dots, x'_n]_{\mathcal{B}'}$. Wówczas $X = PX'$,

gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$.

$\det P \neq 0$

$\Rightarrow X' = P^{-1} \cdot X$



Przykład 6.2.36 - ciąg dalszy

$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$ - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ inna baza, gdzie $b'_1 = (4, 2, 1)$, $b'_2 = (-5, 2, 3)$, $b'_3 = (1, 3, 0)$

Wyznamy współrzędne wektora $v = (-3, 15, 7)$ w bazie $\mathcal{B}'$.

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, X' = P^{-1}X = ?.$$

Wyznamy macierz $P^{-1} = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$ i obliczamy

$$X' = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 6.2.39. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy

$\mathcal{B} = (1 + x, x + x^2, 1 + x^2)$, $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$. Wyznamy macierz $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

$$1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}} = \alpha_1(1 + x) + \beta_1(x + x^2) + \gamma_1(1 + x^2) = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\beta_1 + \gamma_1)x^2$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases} \text{ i ostatecznie } \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Łatwo zauważyć, że $1 + x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}} = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}}$.

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla $1 + x + x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}}$

$$\text{i otrzymujemy } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6.2.40. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru, zaś $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ jej bazami.

Wówczas

$$\text{i) } P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1},$$

$$\text{ii) } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}.$$

Uwaga 6.2.41. W przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdy baza początkowa to baza kanoniczna $\mathcal{B}_k^n$, łatwo wypisać macierze przejścia do nowych baz $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}$ oraz $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$. Wypisanie macierzy $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ wymaga rachunków. Na mocy twierdzenia 6.2.40 otrzymujemy $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, skąd $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$.

