

### Przykład 6.2.36 - ciąg dalszy

$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k^3$  - baza kanoniczna,

$\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$  inna baza, gdzie  $b'_1 = (4, 2, 1)$ ,  $b'_2 = (-5, 2, 3)$ ,  $b'_3 = (1, 3, 0)$

Wyznamy współrzędne wektora  $v = (-3, 15, 7)$  w bazie  $\mathcal{B}'$ .

$$P = P_{\mathcal{B}_k^3 \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, X' = P^{-1}X = ?$$

Wyznamy macierz  $P^{-1} = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix}$  i obliczamy

$$X' = \frac{1}{47} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 17 \\ -3 & 1 & 10 \\ -4 & 17 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

### Przykład 6.2.39. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ oraz jej dwie bazy

$\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, 1+x^2)$ ,  $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ . Wyznamy macierz  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ .

$$b_1 = 1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_{\mathcal{B}'} = \alpha_1(1+x) + \beta_1(x+x^2) + \gamma_1(1+x^2) = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_1 + \beta_1)x + (\beta_1 + \gamma_1)x^2 = 1$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases} \text{ i ostatecznie } \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Łatwo zauważyć, że  $1+x = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_{\mathcal{B}'} = [1, 0, 0]_{\mathcal{B}'}$ .

Analogicznie obliczenia przeprowadzamy dla  $1+x+x^2 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_{\mathcal{B}'}$

$$\text{i otrzymujemy } P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**Twierdzenie 6.2.40.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową skończenie wymiarową, zaś  $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$  jej bazami. Wówczas

i)  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$ ,

\* ii)  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}$ .

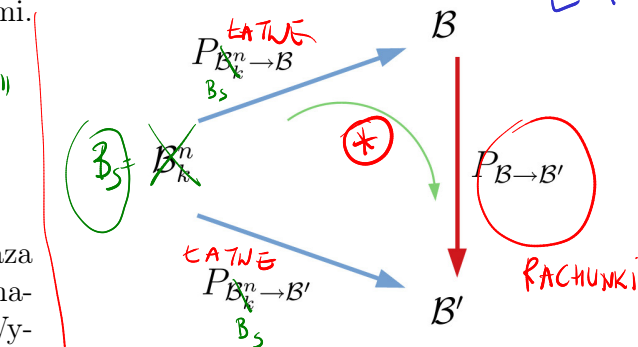
**Uwaga 6.2.41.** W przypadku przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , gdy baza początkowa to baza kanoniczna  $\mathcal{B}_k^n$ , łatwo wypisać macierze przejścia do nowych baz  $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}$  oraz  $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$ . Wypisanie macierzy  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  wymaga rachunków. Na mocy twierdzenia 6.2.40 otrzymujemy  $P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ , skąd  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$ .

$\mathbb{R}_2[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq 2\}$

$\mathcal{B}_s$  - baza standardowa

$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$ax^2 + bx + c = [c, b, a]_{\mathcal{B}_s}$



\* pomógł w zadaniu

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'}$$

$$P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_k^n \rightarrow \mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

TEMAT: *Przekształcenia liniowe*

## 7.1 Definicja przekształcenia liniowego i podstawowe własności

Niech  $V = (V, +, K, \cdot)$  oraz  $W = (W, \oplus, K, \odot)$  będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem  $K$ .

**Definicja 7.1.1.** Odwzorowanie  $\varphi : V \rightarrow W$  spełniające warunki

- własność addytywności  $\forall u, v \in V \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) \oplus \varphi(v)$
- własność homogenity  $\forall v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \odot \varphi(v)$ ,

nazywamy *odwzorowaniem liniowym* lub *przekształceniem liniowym* lub *homomorfizmem przestrzeni liniowych*.<sup>19</sup>

**Twierdzenie 7.1.2.** Niech  $\varphi : V \rightarrow W$ . Wówczas następujące warunki są równoważne.

- $\varphi$  jest liniowe
- $\forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \odot \varphi(u) \oplus \beta \odot \varphi(v)$
- $\forall v_1, \dots, v_n \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$   
 $\varphi(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_1 \odot \varphi(v_1) \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \varphi(v_n)$

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych odwzorowujących  $V$  w  $W$  oznaczamy  $\mathcal{L}_K(V, W)$  lub  $\text{Hom}_K(V, W)$  (lub krótko  $\mathcal{L}(V, W)$  lub  $\text{Hom}(V, W)$ ), gdy wiemy, z jakim ciałem mamy do czynienia).

**Uwaga 7.1.3.** Często notujemy  $V = (V, \underline{+}, K, \cdot)$  oraz  $W = (W, \underline{+}, K, \cdot)$ , to znaczy używamy tych samych symboli dla działań w przestrzeniach  $V$  i  $W$ , mimo że są to różne działania.

**Przykład 7.1.4.** Czy  $\varphi$  jest liniowe?

- $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = ax$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  ustalone

Odwzorowanie jest liniowe, bowiem dla dowolnych  $\alpha \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mamy

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x) &= a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha\varphi(x) \text{ oraz} \\ \varphi(x_1 + x_2) &= a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2). \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Odwzorowanie to wektorowi przypisuje wektor.

Nie może być wzorem z translacją

2)  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = ax + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  ustalone

Jeśli  $b \neq 0$ , to odwzorowanie nie jest liniowe, bowiem

$$\varphi(1+1) = \varphi(2) = 2a + b \neq \varphi(1) + \varphi(1) = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b.$$

Funkcja liniowa  
to nie to samo  
co  
odwr. liniowe!

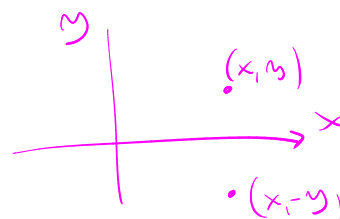
3)  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , symetria względem osi  $Ox$

Ponieważ  $\varphi(x, y) = (x, -y)$ , zatem dla dowolnych  $\alpha \in \mathbb{R}, (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(\alpha(x, y)) = \varphi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x, -y) = \alpha\varphi(x, y) \text{ oraz}$$

$$\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2).$$

Odwzorowanie jest liniowe.



4)  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x, y, z) = (x - y + z, 2y + z + 1)$

Odwzorowanie nie jest liniowe.

$$L = \varphi(\alpha(x, y, z)) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + 1)$$

$$P = \alpha\varphi(x, y, z) = \alpha(x - y + z, 2y + z + 1) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + \alpha z + \alpha)$$

Na ogół  $L \neq P$ . Możemy podać kontrprzykład  $\rightarrow (1-0+0, 2\cdot 0+0+1) = (1, 1)$

$$\varphi(5 \cdot (1, 0, 0)) = \varphi(5, 0, 0) = (5, 1) \neq 5 \cdot \varphi(1, 0, 0) = 5 \cdot (1, 1) = (5, 5)$$

$$\mathbb{R} \ni 5 \cdot (1, 0, 0) \mapsto (5-0+0, 2\cdot 0+0+1) = (5, 1)$$

**Uwaga 7.1.5.** i) Odwzorowanie  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  takie, że  $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ .

ii) Odwzorowanie  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{R}$  takie, że  $\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + jz)$ .

\* **Przykład 7.1.6.** Czy odwzorowanie  $\varphi: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ , dane wzorem  $\varphi(p)(x) = (3-x)p''(x) + 4p'(x)$ , dla dowolnego  $p \in \mathbb{R}_2[x]$ , jest liniowe?

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}_1[x] = \{dx + e \mid d, e \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdźmy, że  $\varphi$  jest liniowe. Wynika to z liniowości różniczkowania.

Dla dowolnych  $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$  mamy

Różniczkowanie sumy jest sumą pochodnych

$$\varphi(p+q)(x) = (3-x)(p+q)''(x) + 4(p+q)'(x) = (3-x)(p''(x) + q''(x)) + 4(p'(x) + q'(x)) = ((3-x)p''(x) + 4p'(x)) + ((3-x)q''(x) + 4q'(x)) = \varphi(p)(x) + \varphi(q)(x),$$

dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$ . Zatem  $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ .

Dla dowolnych  $p \in \mathbb{R}_2[x], \alpha \in \mathbb{R}$  mamy

$$\varphi(\alpha p)(x) = (3-x)(\alpha p)''(x) + 4(\alpha p)'(x) = (3-x)\alpha p''(x) + 4\alpha p'(x) = \alpha \cdot ((3-x)p''(x) + 4p'(x)) = \alpha \cdot \varphi(p)(x), \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}. \text{ Zatem } \varphi(\alpha p) = \alpha\varphi(p).$$

Niech  $V = (V, +, K, \cdot)$  oraz  $W = (W, \oplus, K, \odot)$ .

**Twierdzenie 7.1.7.** Jeśli odwzorowanie  $\varphi: V \rightarrow W$  jest liniowe, to wówczas

i)  $\varphi(0_V) = 0_W,$

$$(x \cdot f)' = x \cdot f'$$

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{\varphi} & m \\ \boxed{m = \varphi(p)} & & \\ m(x) & & \\ \varphi(p)(x) & & \end{array}$$

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

$$x \in V$$

$$\varphi(x) \in W$$

$$\text{ii) } \forall v \in V \varphi(-v) = -\varphi(v).$$

Dowód. i) Ponieważ  $\boxed{0_W} + \varphi(x) = \varphi(x) = \varphi(x + \boxed{0_V}) = \varphi(x) + \boxed{\varphi(0_V)}$ , zatem  $\boxed{\varphi(0_V) = 0_W}$ .

ii) Na mocy i) dla dowolnego  $v \in V$  mamy  $\boxed{0_W} = \varphi(0_V) = \varphi(v - v) = \varphi(v) + \varphi(-v)$ . Stąd  $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ .  $\square$

**Wniosek 7.1.8.** Niech  $\varphi : V \rightarrow W$ . Jeśli  $\varphi(0_V) \neq 0_W$ , to  $\varphi$  nie jest liniowe.

KONTRADYZCJA

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 7.1.7 i) na mocy prawa kontrapozycji.  $\square$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

**Przykład 7.1.9.** Odwzorowanie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 5$  nie jest liniowe, bowiem  $f(0) = 5 \neq 0$ .

**Definicja 7.1.10.** Odwzorowanie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$  nazywamy:

i) *monomorfizmem*, jeśli  $\varphi$  jest *iniekcją*, *f. iniekcja*

ii) *epimorfizmem*, jeśli  $\varphi$  jest *surjekcją*,

iii) *izomorfizmem*, jeśli  $\varphi$  jest *bijekcją*, *(iniekcja + surjekcja)*

iv) *endomorfizmem*, jeśli  $\boxed{V = W}$ , *"wewnątrz"*

$$\varphi : V \rightarrow V$$

v) *automorfizmem*, jeśli  $V = W$  i  $\varphi$  jest *bijekcją*, *(bijektywny endomorfizm)*

vi) *formą liniową*, jeśli  $W = K$ .

*np.  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  liniowe*

$$V = (V_1 + \cdot)$$

$$K = (K + \cdot)$$

$$(K + \cdot)$$

**Twierdzenie 7.1.11.** Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem  $K$ . Niech  $(b_1, \dots, b_n)$  będzie bazą przestrzeni  $V$  oraz niech  $w_1, \dots, w_n \in W$  będzie dowolnym układem wektorów. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  takie, że  $\varphi(b_i) = w_i$ , dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Uwaga 7.1.12.** Z powyższego twierdzenia wynika, że aby w pełni określić odwzorowanie liniowe na przestrzeni liniowej  $V$  wystarczy określić obrazy wektorów bazowych przestrzeni  $V$ .

**Przykład 7.1.13.** Podaj wzór odwzorowania liniowego  $\varphi$ , jeśli

$$V = \mathbb{R}_2[x] \quad B = (1, x, x^2)$$

$$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x], \quad \varphi(x^2 + x) = 6x + 10, \quad \varphi(x - 1) = 4, \quad \varphi(2x) = 8.$$

W przestrzeni wektorowej  $\mathbb{R}_2[x]$  bazą standardową jest  $B = (1, x, x^2)$ . Mamy

$$\begin{cases} \varphi(x^2 + x) = \varphi(x^2) + \varphi(x) = 6x + 10 \\ \varphi(x - 1) = \varphi(x) - \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 8 \end{cases}$$

$$\varphi(1) = ? \quad \varphi(x) = ? \quad \varphi(x^2) = ?$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

Jeśli  $b_1, b_2, b_3$  są lin. niezależne to są bazą

$$\text{Stąd } \varphi(x) = 4, \quad \varphi(1) = \varphi(x) - 4 = 0, \quad \varphi(x^2) = 6x + 10 - \varphi(x) = 6x + 6.$$

$$\varphi(x) = 4, \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi(x^2) = 6x + 6$$

Dowolny  $p \in \mathbb{R}_2[x]$  jest postaci  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , dla pewnych  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Zatem  $\varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1) = a \cdot (6x + 6) + b \cdot 4 + c \cdot 0 = 6ax + 6a + 4b$ .

$$\text{Wzór } \varphi(p) \quad p \in \mathbb{R}_2[x]$$

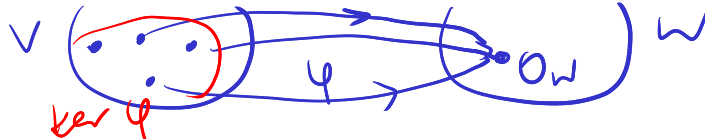
85

$$p = ax^2 + bx + c$$

$$\varphi(p)(x) = \varphi(ax^2 + bx + c) = a\varphi(x^2) + b\varphi(x) + c\varphi(1)$$

$$\text{np. } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

bazą



$$V \xrightarrow[\text{liniowe}]{\varphi} W$$

## 7.2 Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego

Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ .

**Definicja 7.2.1.** i) Zbiór  $\{v \in V : \varphi(v) = 0_W\} \subseteq V$  nazywamy jądrem odwzorowania liniowego  $\varphi$  i oznaczamy  $\text{Ker } \varphi$ .

KERNEL (przedobraz zera)

ii) Zbiór  $\{w \in W : \exists v \in V \varphi(v) = w\} = \{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$  nazywamy obrazem odwzorowania liniowego  $\varphi$  i oznaczamy  $\text{Im } \varphi$  lub  $\varphi(V)$ .

zbiór wartości

**Uwaga 7.2.2.** Dla dowolnego odwzorowania liniowego  $\varphi : V \rightarrow W$  zbiory  $\text{Ker } \varphi$  oraz  $\text{Im } \varphi$  są niepuste.

**Dowód.** Ponieważ  $\varphi(0_V) = 0_W$ , zatem  $0_V \in \text{Ker } \varphi$  oraz  $0_W \in \text{Im } \varphi$ .  $\square$

**Twierdzenie 7.2.3.** Dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  zbiór  $\text{Ker } \varphi$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $V$ , zaś zbiór  $\text{Im } \varphi$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $W$ .



Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $K$ .

**Twierdzenie 7.2.4.** Dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

i)  $\varphi$  jest iniekcją  $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{0_V\}$ ,

ii)  $\varphi$  jest surjekcją  $\Leftrightarrow \text{Im } \varphi = W$ .

WYMIAR OBRAZU

**Definicja 7.2.5.** Jeśli  $\dim \text{Im } \varphi < \infty$ , to liczbę tę nazywamy rzędem odwzorowania liniowego  $\varphi : V \rightarrow W$  i oznaczamy  $r(\varphi)$  lub  $\text{rank}(\varphi)$ .

**Twierdzenie 7.2.6.** (Twierdzenie o rzędzie, Rank-nullity theorem) Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ . Wówczas

$$\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = r(\varphi) + \dim \text{Ker } \varphi = \dim V.$$

**Wniosek 7.2.7.** Dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  mamy  $\dim \text{Im } \varphi \leq \dim V$ .

**Przykład 7.2.8.**

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z, t) = ((x + y + z + 2t, x - y + z + 6t, x + y - z - 4t))$$

Wyznacz jądro oraz obraz  $\varphi$ , ich bazy i wymiary. Podaj własności  $\varphi$ .

$$\varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z + 6t = 0 \\ x + y - z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}w_3]{-\frac{1}{2}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_3}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni \varphi(x, y, z, t) = (x, x, x) + (y, -y, y) + (z, z, -z) + (2t, 6t, -4t)$$





złożenie odwz. lin. jest odwz. liniow. f-izomorfizm  $\Rightarrow$  f<sup>-1</sup>-izomorfizm.

**Twierdzenie 7.3.2.** i) Jeśli  $f \in \mathcal{L}(U, V)$  oraz  $g \in \mathcal{L}(V, W)$ , to wówczas  $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$ .

$\mathcal{L}(U, W)$

ii) Jeśli  $f \in \mathcal{L}(U, W)$  jest bijekcją, to  $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, U)$ .

izomorfizm

Oznaczmy przez  $Aut_K(V) = \{f \in \mathcal{L}(V, V) : f - \text{bijekcja}\}$  zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni liniowej  $V$ .

**Wniosek 7.3.3.** Zbiór  $Aut_K(V)$  wraz z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzebienną.

*Dowód.* Wewnętrzność działania składania wynika na mocy twierdzenia 7.3.2 i). Składania odwzorowań jest łączne. Elementem neutralnym jest odwzorowanie identycznościowe  $id_V$ . Elementem symetrycznym do  $f \in Aut_K(V)$  jest  $f^{-1}$ , bowiem na mocy twierdzenia 7.3.2 ii)  $f^{-1} \in Aut_K(V)$ .  $\square$

Grupa  $Aut_K(V)$  bywa też oznaczana symbolem  $GL(V)$  i nazywana pełną lub ogólną grupą liniową przestrzeni liniowej  $V$ .

**Przykład 7.3.4.** Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dane wzorem  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2)$  jest automorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

## 7.4 Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego

Niech  $V$  oraz  $W$  będą przestrzeniami liniowymi skończenie wymiarowymi nad ciałem  $K$ . Niech  $\mathcal{B}_V = (b_1, \dots, b_n)$  oraz  $\mathcal{B}_W = (c_1, \dots, c_m)$  będą ustalonymi bazami przestrzeni  $V$  i  $W$  odpowiednio. Rozważmy odwzorowanie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$ .

$b_1, \dots, b_n \in V \Rightarrow \varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n) \in W$   
 $\uparrow$   
 są kombin. linowa  $c_1, \dots, c_m$

**Definicja 7.4.1.** Macierzą (lub reprezentacją macierzową) odwzorowania liniowego  $\varphi$  w bazach  $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$  nazywamy macierz  $A \in M_{m \times n}(K)$ , której kolejne kolumny to współrzędne wektorów  $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$  w bazie  $\mathcal{B}_W$ . Oznaczamy ją symbolem  $M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ .

**Przykład 7.4.2.** Wyznacz macierz odwzorowania liniowego  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$ , gdy rozważamy

a) w  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^2$  bazy kanoniczne  $e_1, e_2, e_3$  i  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$

$V = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\varphi} W = \mathbb{R}^2$   
 $\dim V = 3$   $\dim W = 2$

$\varphi(e_1)$   
 $\varphi(e_2)$   
 $\varphi(e_3)$

$\varphi(1, 0, 0) = (3, 0), \varphi(0, 1, 0) = (0, 2), \varphi(0, 0, 1) = (0, 1), M_\varphi(\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 2y + z \end{bmatrix}$

$A'' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$   $2 \times 3$

$\varphi(x, y, z) = (3x, 2y + z)$

b) bazy  $\mathcal{B} = (b_1 = (1, 2, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (0, 0, 1)), \mathcal{C} = (c_1 = (1, 2), c_2 = (0, 1))$

10 > 110  $\varphi$  zmiana bazy

$\varphi(b_1) = \varphi(1, 2, 0) = (3, 4) = [\alpha_1, \beta_1]_{\mathcal{C}}, (3, 4) = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \beta_1)$   
 $\Rightarrow \alpha_1 = 3, \beta_1 = -2, \varphi(b_1) = [3, -2]_{\mathcal{C}}$

$\varphi(b_2) = \varphi(1, 1, 1) = (3, 3) = [\alpha_2, \beta_2]_{\mathcal{C}}, (3, 3) = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 = (\alpha_2, 2\alpha_2 + \beta_2)$

$$\begin{aligned} \varphi(b_3) &= \varphi(0, 0, 1) = (0, 1) = [\alpha_3, \beta_3]_{\mathcal{C}}, & (0, 1) &= \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 = (\alpha_3, 2\alpha_3 + \beta_3) \\ & & & \Rightarrow \underline{\alpha_2 = 3, \beta_2 = -3}, \varphi(b_2) = \underline{[3, -3]_{\mathcal{C}}} \\ & & & \Rightarrow \alpha_3 = 0, \beta_3 = 1, \varphi(b_3) = [0, 1]_{\mathcal{C}} \\ M_{\varphi}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

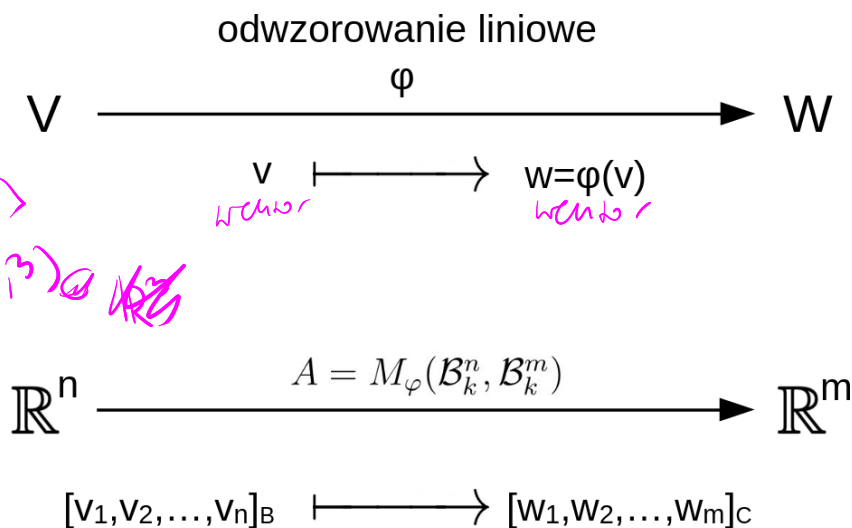
**Obserwacja:** Postać macierzy reprezentującej dane odwzorowanie liniowe zależy od wyboru baz.

**Uwaga 7.4.3.** Odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  taka, że  $\varphi(x) = Ax$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas  $A = M_\varphi(\mathcal{B}_k^n, \mathcal{B}_k^m)$ .

**Uwaga 7.4.4.** Rozważmy dwie przestrzenie liniowe  $V$  oraz  $W$  nad  $\mathbb{R}$  takie, że  $\dim V = n$  oraz  $\dim W = m$ . Niech  $\mathcal{B}$  będzie bazą przestrzeni  $V$ , zaś  $\mathcal{C}$  bazą przestrzeni  $W$ .



**Przykład 7.4.5.** Wyznacz macierz odwzorowania liniowego  $f : \mathbb{C}_1[z] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ ,  $f(\alpha z + \beta) = \alpha A + \beta I_2$ , gdzie  $A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 3 & 4-i \end{bmatrix}$ , względem baz standardowych danych przestrzeni  $(\mathbb{C}_1[z], +, \mathbb{C}, \cdot)$  oraz  $(M_2(\mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot)$ .

Weźmy dowolny  $p \in \mathbb{C}_1[z]$ . Jest on postaci  $p(z) = \alpha z + \beta$ .

Rozważamy bazę  $\mathcal{B} = (1, z)$  przestrzeni  $\mathbb{C}_1[z]$  oraz bazę  $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  przestrzeni