Piętnastka, czyli parzystość permutacji w praktyce

Na czym polega gra

Piętnastka to płaskie pudełko 4×4, w którym leży 15 kwadratowych klocków z numerami $1, \ldots, 15$; jedno pole jest puste. Jedyny dozwolony ruch to przesunięcie klocka sąsiadującego z pustym polem (z góry, z dołu, z lewej lub z prawej) na to puste pole. Klocków nie wolno wyjmować z pudełka. Celem jest ułożenie klocków po kolei, z pustym polem w prawym dolnym rogu.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

plansza ułożona

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

„zagadka 14–15”

Zagadka 14–15. Startujemy z planszy, na której wszystko jest na swoim miejscu, tylko klocki 14 i 15 są zamienione. Czy da się ją ułożyć?

Rozwiązanie: nie da się

Krok 1: plansza jako permutacja. Ponumerujmy pola planszy od 1 do 16 wierszami, a puste pole traktujmy jak „klocek numer 16”. Każde ułożenie planszy to wtedy permutacja $\pi \in S_{16}$: $\pi(k)$ to numer klocka leżącego na polu k. Plansza ułożona to permutacja identycznościowa.

Krok 2: ruch to transpozycja. Ruch zamienia miejscami puste pole (16) z sąsiednim klockiem. Zatem każdy ruch zmienia permutację o jedną transpozycję, czyli *zmienia jej parzystość*.

Krok 3: ile ruchów wykonujemy? Pokolorujmy planszę jak szachownicę. Przy każdym ruchu puste pole przechodzi na pole sąsiednie, czyli *zmienia kolor*. Jeśli puste pole startuje w prawym dolnym rogu i na koniec ma tam wrócić, to musi zmienić kolor parzystą liczbę razy. Liczba ruchów jest więc *parzysta*.

Krok 4: wniosek. Parzysta liczba ruchów to parzysta liczba transpozycji, więc parzystość permutacji na końcu jest taka sama jak na początku.

- Plansza ułożona to identyczność, czyli permutacja *parzysta*.
- „Zagadka 14–15” to identyczność złożona z jedną transpozycją $(14\,15)$, czyli permutacja *nieparzysta*.

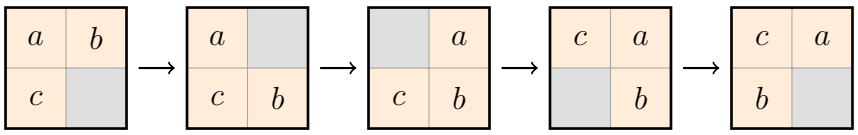
Ponieważ parzystość permutacji jest dobrze określona, nie da się przejść od jednej do drugiej. □

Uwaga. Kluczowe jest tu twierdzenie, że żadnej permutacji nie można rozłożyć raz na parzystą, a raz na nieparzystą liczbę transpozycji. Gdyby to nie było prawdą, powyższy argument by się rozsypał.

A które ustawienia da się ułożyć?

Odpowiedź jest pełna: *dokładnie te*, w których permutacja π jest parzysta, gdy puste pole stoi w prawym dolnym rogu. Przeszkoda z parzystością jest więc jedyną przeszkodą.

Dlaczego wszystkie parzyste ustawienia są osiągalne? Spójrzmy na fragment planszy 2×2 z pustym polem w prawym dolnym rogu i przeprowadźmy puste pole dookoła: w górę, w lewo, w dół, w prawo.



Puste pole wróciło na miejsce po 4 ruchach, a klocki a, b, c przesunęły się po cyklu – dostaliśmy *cykl długości* 3 (parzysty: to dwie transpozycje). Takimi cyklami, wykonywanymi w różnych miejscach planszy, można uzyskać każdą parzystą permutację klocków. Wynika stąd, że z $16! \approx 2 \cdot 10^{13}$ ustawień klocków dokładnie połowa jest rozwiązywalna.

Trochę historii

- **Wynalazek.** Za twórcę układanki uważa się Noyesa Chapmana, poczmistrza z Canastoty w stanie Nowy Jork, który już w połowie lat 70. XIX wieku pokazywał znajomym jej wcześniejszą wersję. Pod koniec 1879 roku zaczęto ją produkować i sprzedawać w Bostonie.

- **Szaleństwo 1880 roku.** W 1880 roku piętnastka stała się modą w Stanach Zjednoczonych, a potem w Europie. Grano w nią w domach, biurach i tramwajach; pojawiały się nagrody pieniężne za rozwiązanie konkretnych ustawień.

- **Matematycy.** Już w 1879 roku W. W. Johnson i W. E. Story opublikowali w *American Journal of Mathematics* pracę *Notes on the „15" Puzzle*. Udowodnili dokładnie to, co powyżej: połowy ustawień nie da się rozwiązać, a druga połowa jest zawsze rozwiązywalna.

- **Sam Loyd.** Najsłynniejszy amerykański twórca łamigłówek przez lata twierdził, że to on wymyślił piętnastkę, i opowiadał, że wyznaczył nagrodę 1000 dolarów za rozwiązanie zagadki 14–15. Nagrody nikt nie odebrał – i nie mógł, bo zadanie jest niewykonalne. Historycy łamigłówek (J. Slocum i D. Sonneveld, *The 15 Puzzle*, 2006) pokazali jednak, że Loyd nie miał nic wspólnego z wynalezieniem gry, a jego opowieści o nagrodzie należy traktować z dużą ostrożnością.