Teoria Obliczeń i Złożoności Obliczeniowej

Kolokwium (2009)

Czas trwania: 60 minut

Imię i nazwisko: ______________________________ **A**

Ze względu na ograniczenie czasu do 60 minut, proszę rozwiazać TRZY zadania z CZTERECH i wyraźnie zaznaczyć, które rozwiązania mają być sprawdzone. Między innymi, następujące problemy są NP-zupełne:

Nazwa: SAT-3CNF
Dane: Formuła logiczna F w postaic CNF, z najwyzej 3ma literałami na klauzulę.
Pytanie: Czy F jest spełnialna?

Nazwa: Parition
Dane: ciąg $s_1, \ldots, s_n$ liczb naturalnych dodatnich
Pytanie: Czy istnieje taki podciąg $s_1, \ldots, s_n$, który sumuje się dokładnie do $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i$?

Nazwa: NAE-SAT
Dane: Formuła logiczna F w postaci CNF.
Pytanie: Czy istnieje wartościowanie zmiennych formuły F tak, że każda klauzula zawiera co najmniej jeden literał ustawiony na prawdę i co najmniej jeden ustawiony na fałsz?

[10pkt.] Zadanie 1. (NP-zupełność) W problemie programowania całkowitoliczbowego mamy dane n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ oraz m nierówności postaci

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & > & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & > & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & > & b_m \end{array}$$

gdzie $a_{i,j}$, b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, to liczby całkowite. Naszym zadaniem jest stwierdzić, czy da się ustawić wartości zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ tak, by każda x_i była liczbą całkowitą oraz by zachodziły wszystkie m nierówności.

Proszę zapisać definicję problemu programowania całkowitoliczbowego w formacie stosowanym na zajęciach (nazwa, dane, pytanie) oraz udowodnić, że jest NP-zupełny (można założyć, że należy do NP).

[10pkt.] Zadanie 2. (NP-zupełność) Prezes pewnej firmy zrezygnował z pracy i o jego miejsce stara się dwóch wiceprezesów, p i q. Aby zostać prezesem, kandydat musi otrzymać ponad połowę głosów członków zarządu. Członków zarządu jest n i każdy z nich ma $w_i \in \mathbb{N}$ głosów, $1 \leqslant i \leqslant n$. Dzień przed głosowaniem zarządu p dowiedział się jak ma zamiar głosować każdy z członków zarządu (na niego, czy na q) i okazało się, że p przegra. Ale, każdy z członków zarządu ma cenę (cena i'go członka zarządu to b_i złotych, $b_i \in \mathbb{N}$), za którą jest skłonny zagłosować na p. Niestety, p ma tylko B złotych.

Proszę udowodnić, że poniższy problem jest NP-zupełny.

Nazwa: Prezes
Dane: Ciąg $w_1, \ldots, w_n$ liczb naturalnych (ilości głosów członków zarządu), ciąg $b_1, \ldots, b_n$ liczb naturalnych (ceny głosów kolejnych członków zarządu), zbiór $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ członków zarządu, którzy głosują na q (pozostali głosują na p).
Pytanie: Czy istnieje taki podzbiór A' zbioru A, że p może uzyskać ponad połowę głosów członków zarządu kupując głosy osób z A', nie wydając więcej niż B złotych?

[10pkt.] Zadanie 3. Ustalamy alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Język jest rzadki, jesli istnieje wielomian p, taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, L ma najwyżej $p(n)$ słów długości n. Język jest unarny, jeśli jest podzbiorem $\{1\}^*$. Dane są języki:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\langle N \rangle \mid L(N) \text{ jest językiem rzadkim}\} \\ L_2 &= \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ jest unarny}\} \end{aligned}$$

Proszę pokazać, że $L_2 \leqslant_m L_1$.

[10pkt.] Zadanie 4. Dla dowolnego języka L, przez L^{**} rozumiemy

$$L^{**} = L^2 \cup L^4 \cup L^6 \cup \ldots$$

Proszę pokazać, że jeśli $L \in \mathrm{P}$ to $L^{**} \in \mathrm{P}$.