**Zadania z fizyki — Zestaw 6**

Mechanika kwantowa

WEAIiE - Informatyka, rok I, grupy 1 i 3

1. Korzystając z **postulatów Bohra** znaleźć poziomy energii jonów wodoropodobnych: $E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$.

2. Sprawdzić **równania operatorowe**:
   - $\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 - 1$
   - $\frac{\partial}{\partial x}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{\partial}{\partial x}$

3. Korzystając z **przedstawienia Jordana** $\left(\hat{r} \to \vec{r}, \hat{p} \to -i\hbar\nabla, \hat{E} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ znaleźć operatory:
   - energii kinetycznej $\hat{T}$ dla cząstki swobodnej,
   - energii potencjalnej $\hat{V}$ dla oscylatora harmonicznego,
   - $z$-owej składowej momentu pędu $\hat{L}_z$.

4. Wykazać, że $u(x) = \exp(-x^2/2)$ jest funkcją własną operatora $\hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2$ i znaleźć wartość własną dla tego operatora odpowiadającą wektorowi $u(x)$. Odpowiednikiem jakiej klasycznej wielkości może być operator $\hat{H}$?

5. Korzystając z przedstawienia Jordana zapisać równanie operatorowe: $\hat{T} + \hat{V} = \hat{E}$, gdzie $\hat{T}$ - operator energii kinetycznej, $\hat{V}$ - operator energii potencjalnej, $\hat{E}$ - operator energii całkowitej (po dołożeniu za operatorami funkcji falowej $\Psi(x,t)$ jest to **równianie Schrödingera z czasem**). Następnie zakładając niezależności energii potencjalnej od czasu ($\partial V/\partial t = 0$) oraz stosując metodę rozdzielenia zmiennych $\Psi(x,t) = \psi(x)\chi(t)$:
   - wyprowadzić **równanie Schrödingera** (bez czasu): $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$,
   - znaleźć zależność $\chi(t)$.

   Zapoznać się z probabilistyczną interpretacją funkcji falowej $\Psi(x,t)$.

6. Pokazać, że dla cząstki swobodnej funkcja falowa $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ spełnia równanie (falowe) Schrödingera (z czasem).

7. Wartość średnią dowolnego operatora $\hat{\Omega}$ dla układu znajdującego się w stanie opisanym unormowaną funkcją falową $\psi(\vec{r})$ liczymy jako: $\langle\hat{\Omega}\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(\vec{r})\hat{\Omega}\psi(\vec{r})d\vec{r}$. Znaleźć średnią energię kinetyczną w stanie

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin\frac{2\pi x}{a} + B\cos\frac{4\pi x}{a} & \Leftrightarrow x \in [0,a] \\ 0 & \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(a,+\infty) \end{cases}.$$

   w układzie jednowymiarowym.

8. Dla jednowymiarowej **nieskończonej studni potencjału** operator energii potencjalnej $V(x)$ dany jest formułą:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x \in (0,a) \\ \infty & \Leftrightarrow x \in (-\infty,0]\cup[a,+\infty) \end{cases}.$$

   Rozwiązać równanie Schrödingera dla cząstki w studni zakładając zerowanie się funkcji falowej na brzegach studni: $\psi(0) = \psi(a) = 0$. Znaleźć dopuszczalne wartości energii cząstki w studni. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie podstawowym w przedziale $[0, a/4]$?

9. Cząstka o energii $E < V_0$ opisana falą płaską $\psi(x) = \exp(ikx)$ nadchodząca z lewej strony zderza się ze skokiem potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x < 0 \\ V_0 & \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$$

Znaleźć amplitudę fali odbitej oraz amplitudę i pęd fali przechodzącej w prawo.

10. Nieunormowana funkcja falowa cząstki swobodnej poruszającej się po linii prostej dana jest formułą:

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta} + \frac{ipx}{\hbar}\right),$$

gdzie $p$ i $\Delta$ są stałe. Znaleźć średnią wartość położenia $\langle x \rangle$ i pędu $\langle p \rangle$ cząstki w tym stanie.

11. W wyniku zderzenia fotonu o długości fali $\lambda_0$ z elektronem swobodnym (lub słabo związanym) następuje rozproszenie fotonu (tzw. **rozpraszanie comptonowskie**), któremu towarzyszy zmiana długości fali fotonu ($\lambda_0 \to \lambda$) oraz kierunku o kąt $\theta$. Korzystając z praw zachowania energii i pędu wyprowadzić wzór na comptonowską zmianę długości fali $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$.
*Prawo zachowania pędu najwygodniej zapisać korzystając z twierdzenia cosinusów* $p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$, *do prawa zachowania energii — energię elektronu najlepiej liczyć z niezmiennika relatywistycznego* $E_e^2 - p_e^2c^2 = m_e^2c^4$.

*Krzysztof Malarz, 98/11/11*