

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–5 punktów. We wszystkich rozwiązaniach należy przedstawić pełny tok rozumowania.

Czas pracy: 75 minut.

Zadanie 1. Dziekan przygotowuje prezenty dla studentów. Ma do dyspozycji k pudełek, do których chce włożyć m czapek. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

- a) pudełka są ponumerowane, a czapki różnokolorowe oraz w żadnym pudełku nie może być więcej niż połowa wszystkich czapek?
- b) pudełka są ponumerowane, a czapki identyczne oraz w żadnym pudełku nie może być więcej niż połowa czapek?
- c) pudełka są identyczne, a czapki różnokolorowe oraz żadne pudełko nie może być puste?

Zadanie 2. Jaś zawsze wrzuca do skarbonki całkowitą liczbę złotych, przy czym codziennie przynajmniej złotówkę, a tygodniowo nie więcej niż 12 złotych. Udowodnij, że na przestrzeni szesnastu tygodni istnieje podciąg kolejnych dni, podczas których Jaś wrzucił do skarbonki łącznie 31 złotych.

Zadanie 3. Pewien człowiek ma siedmiu przyjaciół. Na ile sposobów może zapraszać po trzech z nich na kolację przez siedem kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz?

Zadanie 4. Niech a_n dla $n \geq 2$ oznacza liczbę n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch kolejnych wyrazów jest parzysty. Podaj i rozwiąż zależność rekurencyjną dla ciągu $(a_n)_{n=2}^{\infty}$.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–5 punktów. We wszystkich rozwiązaniach należy przedstawić pełny tok rozumowania.

Czas pracy: 75 minut.

Zadanie 1. Dziekan przygotowuje prezenty dla studentów. Ma do dyspozycji k pudełek, do których chce włożyć m czapek. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

- a) pudełka są ponumerowane, a czapki różnokolorowe oraz w żadnym pudełku nie może być więcej niż połowa wszystkich czapek?
- b) pudełka są ponumerowane, a czapki identyczne oraz w żadnym pudełku nie może być więcej niż połowa czapek?
- c) pudełka są identyczne, a czapki różnokolorowe oraz żadne pudełko nie może być puste?

Zadanie 2. Jaś zawsze wrzuca do skarbonki całkowitą liczbę złotych, przy czym codziennie przynajmniej złotówkę, a tygodniowo nie więcej niż 12 złotych. Udowodnij, że na przestrzeni szesnastu tygodni istnieje podciąg kolejnych dni, podczas których Jaś wrzucił do skarbonki łącznie 31 złotych.

Zadanie 3. Pewien człowiek ma siedmiu przyjaciół. Na ile sposobów może zapraszać po trzech z nich na kolację przez siedem kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz?

Zadanie 4. Niech a_n dla $n \geq 2$ oznacza liczbę n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch kolejnych wyrazów jest parzysty. Podaj i rozwiąż zależność rekurencyjną dla ciągu $(a_n)_{n=2}^{\infty}$.