Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–5 punktów. We wszystkich rozwiązaniach należy przedstawić pełny tok rozumowania.
Czas pracy: 75 minut.

Zadanie 1. Graf trójdzielny to graf, którego zbiór wierzchołków da się podzielić na niepuste zbiory X, Y, Z w taki sposób, że jeśli uv jest krawędzią tego grafu, to u należy do innego zbioru podziału niż v. Jeżeli $|X| = p, |Y| = q$ i $|Z| = r$ oraz każde dwa wierzchołki należące do różnych zbiorów podziału są połączone krawędzią, to mówimy o grafie trójdzielnym pełnym $K_{p,q,r}$.

a) Podaj i uzasadnij warunek konieczny i wystarczający na to, aby graf $K_{p,q,r}$ był eulerowski.
b) Opisz dopełnienie grafu $K_{p,q,r}$.
c) Czy graf $K_{p,q,r}$ jest dwudzielny? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.

a) Podaj przykład grafu G spełniającego warunki:
$$|G| = 14, \ \ \Delta(G) = 3 \ \text{ i } \ \operatorname{diam}(G) = 3.$$
b) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$ w twierdzeniu Diraca nie może zostać zastąpione przez założenie $\delta(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$ (gdzie $n = |G|$).
c) Dla każdej pary liczb całkowitych (n, k), takiej że $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ i $2k \neq n$, podaj przykład grafu rzędu $2n$, w którym:
   - k wierzchołków jest stopnia $n - k + 1$,
   - $n - k$ wierzchołków jest stopnia $k + 1$,
   - pozostałe wierzchołki są stopnia 3.

Zadanie 3. Grafem samodopełniającym nazywamy graf izomorficzny ze swoim dopełnieniem, a grafem regularnym – graf, w którym wszystkie wierzchołki są tego samego stopnia. Niech H będzie regularnym grafem samodopełniającym rzędu 5. Wyznacz grupę permutacji działającą na zbiorze wierzchołków grafu H. Korzystając z lematu Burnside'a, znajdź liczbę parami różnych pokolorowań wierzchołków grafu H na różowo, niebiesko i biało (nie wszystkie dostępne kolory muszą zostać użyte).

Zadanie 4. Wyznacz wzory ciągów $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, których funkcje tworzące mają postać odpowiednio
$$A(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \ \text{ i } \ B(x) = x \cdot (2x-1)^{2022}.$$
Ile wynosi $b_0 + b_1 + \ldots + b_{4000}$?