

Zadania 3 - zasada szufladkowa Dirichleta

1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.
2. Udowodnij, że w dowolnej grupie $n + 2$ różnych liczb całkowitych są dwie, których różnica lub suma dzieli się przez $2n$.
3. Udowodnij, że wśród k punktów dowolnie wybranych z koła o promieniu 1 są dwa, których odległość nie przekracza 1, jeżeli
 - a) $k = 7$.
 - b) $k = 6$.
4. W pewnym kraju jest 66 miast. Każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji (kolej, autobus, statek, samolot). Wykaż, że istnieją trzy miasta, takie, że można odbyć podróż pomiędzy nimi "po trójkącie" używając tylko jednego środka komunikacji.
5. Wykaż, że w dowolnym ciągu n liczb naturalnych można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez n .
6. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej niezerowa wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.
7. Uzasadnij, że istnieje niezerowa liczba całkowita k , dla której część ułamkowa (*mantysa* x czyli $x - [x]$) liczby $k\sqrt{2}$ jest mniejsza od 0,01.
8. Wykaż, że z dowolnego zbioru n liczb całkowitych ($n \geq 3$) da się wybrać trzy parami różne elementy a, b, c w taki sposób, że liczba $a(b - c)$ jest podzielna przez n .