

## Zadania 3 - zasada szufladkowa Dirichleta

1. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.
2. Udowodnij, że w dowolnej grupie  $n + 2$  różnych liczb całkowitych są dwie, których różnica lub suma dzieli się przez  $2n$ .
3. Udowodnij, że wśród  $k$  punktów dowolnie wybranych z koła o promieniu

1 są dwa, których odległość nie przekracza 1, jeżeli

a)  $k = 7$ .

b)  $k = 6$ .

4. W pewnym kraju jest 66 miast. Każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji (kolej, autobus, statek, samolot). Wykaż, że istnieją trzy miasta, takie, że można odbyć podróż pomiędzy nimi "po trójce" używając tylko jednego środka komunikacji.
5. Wykaż, że w dowolnym ciągu  $n$  liczb naturalnych można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez  $n$ .

6. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej niezerowa wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.
7. Uzasadnij, że istnieje niezerowa liczba całkowita  $k$ , dla której część ułamkowa (*mantysa*  $x$  czyli  $x - \lfloor x \rfloor$ ) liczby  $k\sqrt{2}$  jest mniejsza od 0,01.
8. Wykaż, że z dowolnego zbioru  $n$  liczb całkowitych ( $n \geq 3$ ) da się wybrać trzy parami różne elementy  $a, b, c$  w taki sposób, że liczba  $a(b-c)$  jest podzielna przez  $n$ .