

Zestaw 1 - Kombinatoryka

Artur Fortuna
AGH

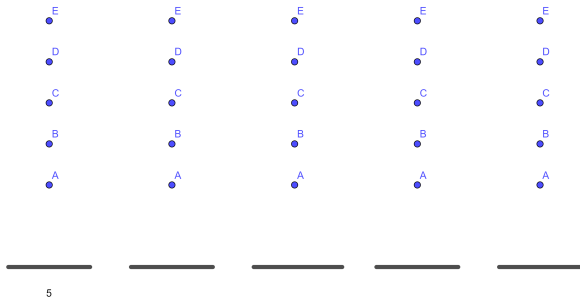
Założmy, że mamy zbiór elementów, z których każdy jest inny od pozostałych.

Na ile sposobów możemy go ułożyć w linii?

Zobaczmy to na przykładzie zbioru

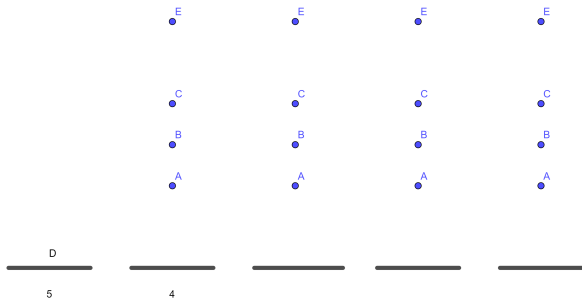
$$\{A, B, C, D, E\}$$

Permutacje



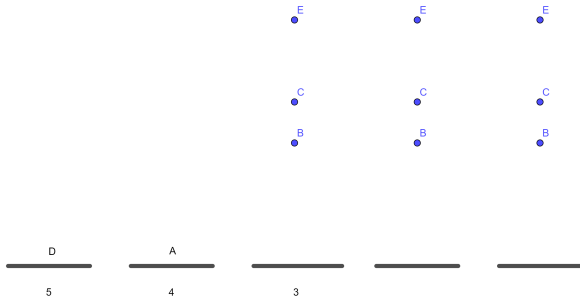
Na pierwszej pozycji możemy umieścić dowolną z pięciu liter.

Permutacje



Ale bez względu na to, co wybierzemy, zmniejszy to liczbę opcji na drugim miejscu.

Permutacje



I tak dalej...

Dlatego zbiór $\{A, B, C, D, E\}$ możemy ułożyć na $5!$ sposobów.
Ogólniej rzecz biorąc: zbiór n różnych elementów możemy ułożyć na $n!$ sposobów.

Liczba permutacji

$$n!$$

Permutacje z powtórzeniami

Jest trochę inaczej, gdy elementy się powtarzają. Zobaczmy to na przykładzie elementów

$$M, I, S, S$$

Permutation with repetition

Jeśli pokolorujemy obie litery S

M, I, S, S

Czyniąc je rozróżnialnymi.

Permutacje z powtórzeniami

M	I	S	S	I	M	S	S	I	S	M	S	I	S	S	M
M	I	S	S	I	M	S	S	I	S	M	S	I	S	S	M
M	S	I	S	S	M	I	S	S	I	M	S	S	I	S	M
M	S	I	S	S	M	I	S	S	I	M	S	S	I	S	M
M	S	S	I	S	M	S	I	S	S	M	I	S	S	I	M
M	S	S	I	S	M	S	I	S	S	M	I	S	S	I	M

Mamy $4!$ (to jest 24) różne ustawienia.

Permutacje z powtórzeniami

M I S S	I M S S	I S M S	I S S M
M I S S	I M S S	I S M S	I S S M
M S I S	S M I S	S I M S	S I S M
M S I S	S M I S	S I M S	S I S M
M S S I	S M S I	S S M I	S S I M
M S S I	S M S I	S S M I	S S I M

Jeśli jednak wyłączymy kolory, zobaczymy, że niektóre z nich są takie same.

Permutacje z powtórzeniami

M I S S	I M S S	I S M S	I S S M
M I S S	I M S S	I S M S	I S S M
M S I S	S M I S	S I M S	S I S M
M S I S	S M I S	S I M S	S I S M
M S S I	S M S I	S S M I	S S I M
M S S I	S M S I	S S M I	S S I M

Ta sama sekwencja jest powtarzana dwa razy, ponieważ istnieją $2!$ sposoby, w jakie moglibyśmy zamienić dwie litery S.

Istnieją więc $\frac{4!}{2!}$ układy.

Permutacje z powtórzeniami

Co jeśli litery

M, I, S, S, S ?

Odpowiedź to $\frac{5!}{3!}$ układy.

Dzieje się tak, ponieważ istnieją $3!$ sposoby, w jakie możemy przestawić litery S , aby uzyskać to samo słowo.

Permutacje z powtórzeniami

Co jeśli litery

M, I, S, S, I, S ?

Odpowiedź to $\frac{6!}{3! \cdot 2!}$ układy.

Dzieje się tak, ponieważ istnieją 3! sposoby, w jakie możemy przestawić litery S i 2! sposoby, w jakie możemy przestawić litery I, otrzymując to samo słowo.

Permutacje z powtórzeniami

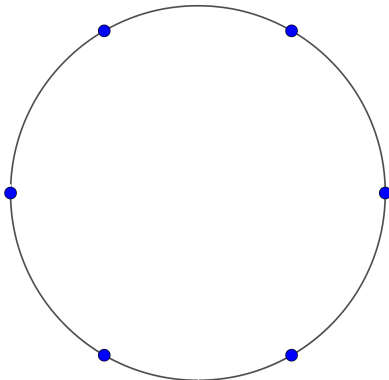
A zatem ogólna odpowiedź to:

Liczba permutacji z powtórzeniami

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_s!}$$

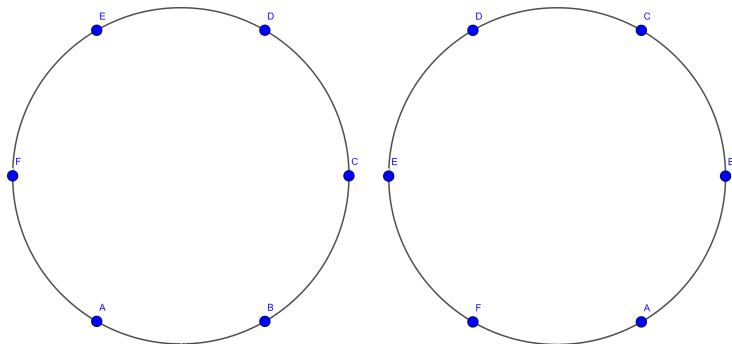
Gdzie $r_1, r_2, \dots, r_s$ są liczbami powtórzeń.

Permutacje cykliczne



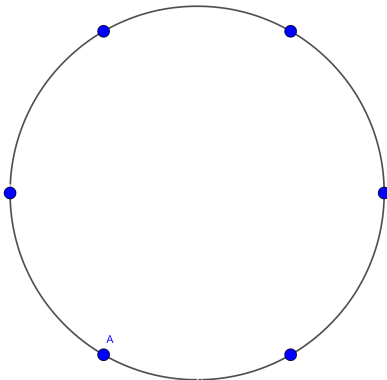
Spróbujmy ułożyć litery A, B, C, D, E, F na okręgu. Załóżmy, że wszystkie miejsca na okręgu są identyczne i żadne nie jest w żaden sposób wyróżnione. Dobrym przykładem jest okrągły stół lub karuzela. Obroty są dozwolone na płaszczyźnie, ale nie w przestrzeni.

Permutacje cykliczne



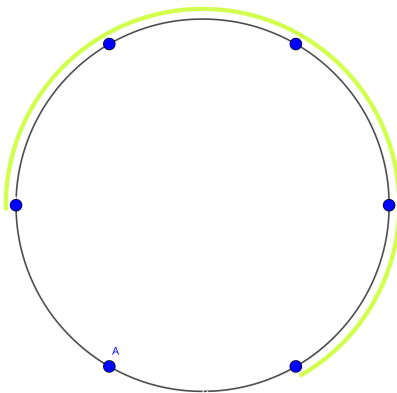
Odpowiedź nie jest $n!$. Jak widać, w obu układach na obrazku każda litera ma tych samych sąsiadów, więc są identyczne.

Permutacje cykliczne



Jak to rozwiązać? Należy wybrać dowolną literę, np. A i umieścić ją w dowolnym miejscu. Nie ma znaczenia, w którym miejscu, ponieważ wszystkie miejsca są identyczne. Robimy to na 1 sposób.

Permutacje cykliczne



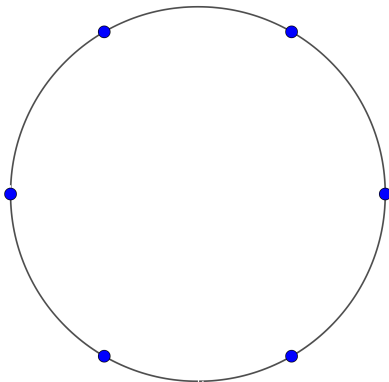
Zauważ, że nie mamy już do czynienia z okręgiem. Pozostałe punkty tworzą linię. Możemy więc ułożyć na nich litery na $5!$ sposobów.

Dlatego zbiór $\{A, B, C, D, E, F\}$ możemy ułożyć na $5!$ sposobów.
Ogólniej rzecz biorąc: zbiór n różnych elementów można ułożyć na okręgu na $(n - 1)!$ sposobów.

Liczba permutacji cyklicznych

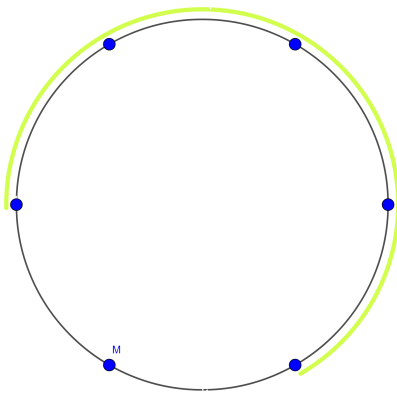
$$(n - 1)!$$

Permutacje cykliczne z powtórzeniami



Co jeśli umieścimy elementy na kole, ale niektóre z nich się powtarzają? Odpowiedź jest prosta, jeśli jest co najmniej jeden unikalny element.

Permutacje cykliczne z powtórzeniami



Spróbujmy ułożyć litery M, I, S, S, I, S na okręgu. Możemy zrobić tak jak poprzednio. Ułożymy unikalne M w dowolnej pozycji (w 1 sposób), a wtedy otrzymamy regularną permutację z powtórzeniami.

Permutacje cykliczne z powtórzeniami

Dlatego możemy ułożyć litery M, I, S, S, I, S na $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$ sposobów.
Ogólna odpowiedź brzmi:

Liczba permutacji cyklicznych z powtórzeniami, które zawierają unikalny element

$$\frac{(n-1)!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_s!}$$

Gdzie $r_1, r_2, \dots, r_s$ to liczby powtórzeń.

Permutacje cykliczne z powtórzeniami

A co jeśli nie ma unikalnego elementu, ponieważ każdy się powtarza? Nie ma prostej odpowiedzi.

Założmy, że mamy zbiór n elementów, z których każdy jest różny od pozostałych.

Na ile sposobów możemy wybrać k spośród nich?

Nie ma jednej właściwej odpowiedzi, ponieważ zależy to od dwóch czynników.

Po pierwsze, czy możemy wybrać ponownie coś, co już zostało wybrane?

Po drugie, czy ma znaczenie, w jakiej kolejności dokonamy wyboru?

Kombinacje i wariacje

Możemy zebrać odpowiedzi w tabeli

	powtarzanie -	powtarzanie +
kolejność -		
kolejność +		

Kombinacje i wariacje

W lewym górnym rogu znajduje się współczynnik dwumianowy (symbol Newtona).

	powtarzanie -	powtarzanie +
kolejność -	$\binom{n}{k}$	
kolejność +		

Kombinacje i wariacje

W lewym dolnym rogu: możemy najpierw wybrać bez kolejności, a następnie przypisać kolejność. Tak więc odpowiedź to

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

	powtarzanie -	powtarzanie +
kolejność -	$\binom{n}{k}$	
kolejność +	$\frac{n!}{(n-k)!}$	

Kombinacje i wariacje

W prawym dolnym rogu: za pierwszym razem wybieramy jedną z n , za drugim razem jedną z n itd. Odpowiedź brzmi więc $n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n$.

	powtarzanie -	powtarzanie +
kolejność -	$\binom{n}{k}$	
kolejność +	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Kombinacje i wariacje

Prawy górny róg jest mało znany, ponieważ rzadko uczy się o nim w szkołach.

	powtarzanie -	powtarzanie +
kolejność -	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
kolejność +	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Kombinacje i wariacje

Za każdym razem gdy dokonujemy wyboru, wystarczy odpowiedzieć na te dwa pytania, a będziemy wiedzieć, którego wzoru użyć.

	powtarzanie -	powtarzanie +
kolejność -	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
kolejność +	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Powodzenia!

Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.