

Zestaw 2 - Modele przeliczalny i geometryczny

Artur Fortuna
AGH

W szkole średniej prawdopodobieństwo było definiowane zgodnie z klasycznym modelem. Należało policzyć ile zdarzeń elementarnych jest w całej przestrzeni, a ile w zdarzeniu sprzyjającym i dokonać dzielenia.

Prawdopodobieństwo - model klasyczny

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Nie zawsze jednak jest tak prosto. Bo co zrobić gdy $|\Omega| = \infty$?
Albo gdy i licznik i mianownik są nieskończone?

Model przeliczalny

Jednym z rozwiązań jest **model przeliczalny**. Stosujemy go wtedy, gdy liczba zdarzeń w całej przestrzeni jest nieskończona, ale jest ich tyle ile liczb naturalnych (są różne rodzaje nieskończoności, nas interesuje taki, w którym zdarzeń jest tyle, że można je ustawić w ciąg jak liczby naturalne).

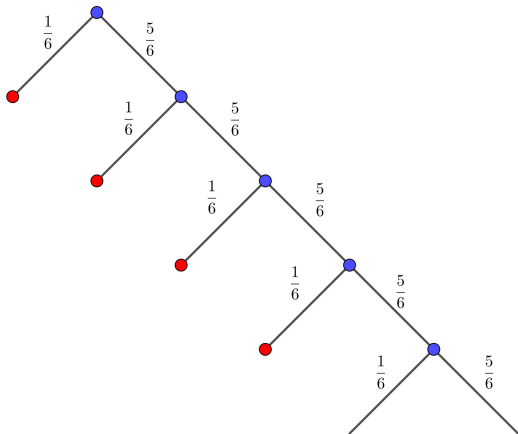
W takim modelu prawdopodobieństwo każdego zdarzenia elementarnego określa się osobno. A potem po prostu sumujemy prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń elementarnych wchodzących w skład sprzyjającego zdarzenia.

Nawet jeśli jest ich nieskończenie wiele możemy dodać je korzystając ze sposobów sumowania szeregów.

W opisanu takiego modelu pomaga tzw. **drzewko stochastyczne**.
Zobaczmy to na przykładzie.

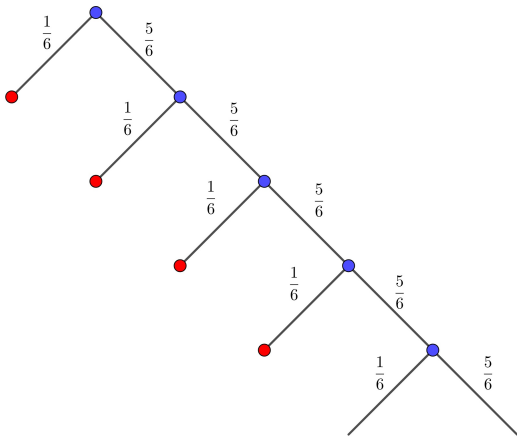
Rzucamy kostką K_6 tak długo aż nie wyrzucimy szóstki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będziemy potrzebować nieparzystej liczby rzutów?

Model przeliczalny



Zdarzeniami elementarnymi są tu tylko końcowe (czerwone) węzły. Mnożąc kolejne wartości na drzewku możemy policzyć prawdopodobieństwo dla każdego zdarzenia elementarnego.

Model przeliczalny



A rozwiązanie zadania?

$$P(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11}$$

Inaczej postępujemy wtedy, gdy Ω jest nieprzeliczalna (tzn. jest nieskończona, ale nie tak jak liczby naturalne, ale np. tak liczna jak liczby rzeczywiste). Stosujemy wtedy **model geometryczny**. Działa on tak samo jak model klasyczny, ale zamiast liczebności stosujemy inną miarę np. długość, pole czy objętość.

Prawdopodobieństwo - model geometryczny z długością jako miarą

$$P(A) = \frac{L_A}{L_\Omega}$$

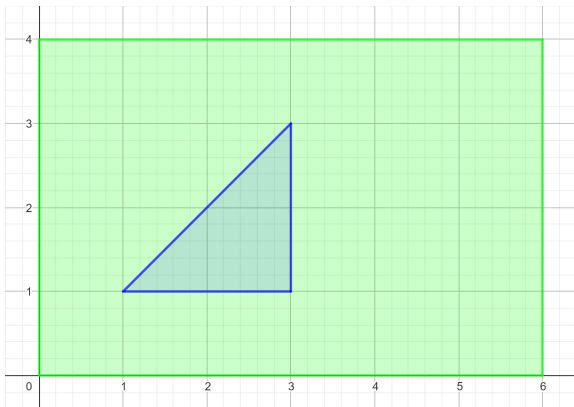
Prawdopodobieństwo - model geometryczny z polem jako miarą

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

Prawdopodobieństwo - model geometryczny z objętością jako miarą

$$P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega}$$

Model geometryczny



Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierając dowolny punkt z zielonego prostokąta wybierzemy punkt z niebieskiego trójkąta?

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2}{24}$$

Powodzenia!
Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.