

Zestaw 4 - Rozkłady dyskretne

Artur Fortuna
AGH

Idea **zmiennej losowej** polega na tym by przedstawiać wyniki zdarzeń jako liczby.

Idea **zmiennej losowej** polega na tym by przedstawiać wyniki zdarzeń jako liczby. Czyli nie prawdopodobieństwo wylosowania reszki, króla pik, czy białej kulki, ale zakodowanie wyników jako liczby.

Zapis rozkładu dyskretnego

Musimy się nauczyć nowego sposobu zapisywania rozkładu.

Zapis rozkładu dyskretnego

Musimy się nauczyć nowego sposobu zapisywania rozkładu.

Dla przykładu rzut monetą. Zakodujemy orła jako 1, a reszkę jako 0. Nazwijmy tę zmienną losową X (duże X). Taki **rozkład zmiennej losowej** zapiszemy tak:

Zapis rozkładu dyskretnego

Musimy się nauczyć nowego sposobu zapisywania rozkładu.

Dla przykładu rzut monetą. Zakodujemy orła jako 1, a reszkę jako 0. Nazwijmy tę zmienną losową X (duże X). Taki **rozkład zmiennej losowej** zapiszemy tak:

$$P_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$$

Zapis rozkładu dyskretnego

Musimy się nauczyć nowego sposobu zapisywania rozkładu.

Dla przykładu rzut monetą. Zakodujemy orła jako 1, a reszkę jako 0. Nazwijmy tę zmienną losową X (duże X). Taki **rozkład zmiennej losowej** zapiszemy tak:

$$P_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$$

Ta delta to tzw. **miara Diraca**. Taka miara, dla której liczy się tylko punkt.

Zapis rozkładu dyskretnego

Musimy się nauczyć nowego sposobu zapisywania rozkładu.

Dla przykładu rzut monetą. Zakodujemy orła jako 1, a reszkę jako 0. Nazwijmy tę zmienną losową X (duże X). Taki **rozkład zmiennej losowej** zapiszemy tak:

$$P_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$$

Ta delta to tzw. **miara Diraca**. Taka miara, dla której liczy się tylko punkt. Nasz rozkład prawdopodobieństwa to zatem rozkład skupiony w dwóch punktach 0 i 1.

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Zapis rozkładu dyskretnego

Musimy się nauczyć nowego sposobu zapisywania rozkładu.

Dla przykładu rzut monetą. Zakodujemy orła jako 1, a reszkę jako 0. Nazwijmy tę zmienną losową X (duże X). Taki **rozkład zmiennej losowej** zapiszemy tak:

$$P_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$$

Ta delta to tzw. **miara Diraca**. Taka miara, dla której liczy się tylko punkt. Nasz rozkład prawdopodobieństwa to zatem rozkład skupiony w dwóch punktach 0 i 1.

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Ale nikt nam nie zabrania liczyć innych liczb:

$$P(X = 5) = 0, \quad P(X \in (6, 13)) = 0, \quad P(X \in (\frac{4}{5}, 8)) = \frac{1}{2} \text{ itp.}$$

A jak będzie dla rzutu kością K6?

A jak będzie dla rzutu kością K6?

$$P_X = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_3 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{1}{6}\delta_5 + \frac{1}{6}\delta_6$$

A jak będzie dla rzutu kością K6?

$$P_X = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_3 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{1}{6}\delta_5 + \frac{1}{6}\delta_6$$

Z 24 kart losujemy jedną, $X = 1$ dla asa, $X = 2$ dla króla lub damy, $X = \pi$ dla reszty kart.

A jak będzie dla rzutu kością K6?

$$P_X = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_3 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{1}{6}\delta_5 + \frac{1}{6}\delta_6$$

Z 24 kart losujemy jedną, $X = 1$ dla asa, $X = 2$ dla króla lub damy, $X = \pi$ dla reszty kart.

$$P_X = \frac{4}{24}\delta_1 + \frac{8}{24}\delta_2 + \frac{12}{24}\delta_\pi$$

A jak będzie dla rzutu kością K6?

$$P_X = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_3 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{1}{6}\delta_5 + \frac{1}{6}\delta_6$$

Z 24 kart losujemy jedną, $X = 1$ dla asa, $X = 2$ dla króla lub damy, $X = \pi$ dla reszty kart.

$$P_X = \frac{4}{24}\delta_1 + \frac{8}{24}\delta_2 + \frac{12}{24}\delta_\pi$$

Łatwe?

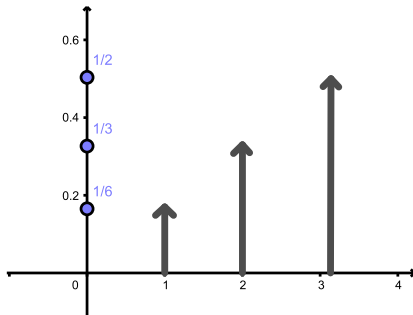
Rysowanie rozkładu dyskretnego

Jak narysować rozkład dyskretny? Można narysować kropki, ale przyjęło się strzałki o odpowiedniej wysokości.

Rysowanie rozkładu dyskretnego

Jak narysować rozkład dyskretny? Można narysować kropki, ale przyjęło się strzałki o odpowiedniej wysokości.

Dla ostatniego rozkładu:



Potrzebne nam jeszcze jedno pojęcie.

Potrzebne nam jeszcze jedno pojęcie.

Dystrybuanta

$$F_X(a) = P(X \leq a)$$

Potrzebne nam jeszcze jedno pojęcie.

Dystrybuanta

$$F_X(a) = P(X \leq a)$$

Czyli dystrybuanta w punkcie to prawdopodobieństwo wszystkiego co mniejsze (co było na lewo, co było wcześniej), z tym punktem włącznie.

Potrzebne nam jeszcze jedno pojęcie.

Dystrybuanta

$$F_X(a) = P(X \leq a)$$

Czyli dystrybuanta w punkcie to prawdopodobieństwo wszystkiego co mniejsze (co było na lewo, co było wcześniej), z tym punktem włącznie. I tutaj uwaga, bo jest drobne zamieszanie, w części książek czy materiałów jest inna definicja: $F_X(a) = P(X < a)$.

Potrzebne nam jeszcze jedno pojęcie.

Dystrybuanta

$$F_X(a) = P(X \leq a)$$

Czyli dystrybuanta w punkcie to prawdopodobieństwo wszystkiego co mniejsze (co było na lewo, co było wcześniej), z tym punktem włącznie. I tutaj uwaga, bo jest drobne zamieszanie, w części książek czy materiałów jest inna definicja: ~~$F_X(a) = P(X < a)$~~ .

Trzymamy się wersji z wykładu - z nierównością słabą

$$F_X(a) = P(X \leq a)!$$

Obliczanie dystrybuanty

Jak obliczyć dystrybuantę?

Obliczanie dystrybuanty

Jak obliczyć dystrybuantę? Dla przykładu weźmy rozkład

$$P_X = \frac{1}{5}\delta_1 + \frac{1}{5}\delta_2 + \frac{1}{5}\delta_3 + \frac{1}{5}\delta_4 + \frac{1}{5}\delta_5.$$

Obliczanie dystrybuanty

Jak obliczyć dystrybuantę? Dla przykładu weźmy rozkład

$$P_X = \frac{1}{5}\delta_1 + \frac{1}{5}\delta_2 + \frac{1}{5}\delta_3 + \frac{1}{5}\delta_4 + \frac{1}{5}\delta_5.$$

Chyba nie będzie problemu poza samymi punktami 1, 2, 3, 4 i 5, ale przecież $F_X(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{5}$, $F_X(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{5}$ itd.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{5}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{5}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Obliczanie dystrybuanty

Jak obliczyć dystrybuantę? Dla przykładu weźmy rozkład

$$P_X = \frac{1}{5}\delta_1 + \frac{1}{5}\delta_2 + \frac{1}{5}\delta_3 + \frac{1}{5}\delta_4 + \frac{1}{5}\delta_5.$$

Chyba nie będzie problemu poza samymi punktami 1, 2, 3, 4 i 5, ale przecież $F_X(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{5}$, $F_X(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{5}$ itd.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{5}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{5}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

W nawiasie i w klamerkach x jest mały bo to liczba. Duży X jako indeks dolny przy F oznacza zmienną losową.

Obliczanie dystrybuanty

Jak obliczyć dystrybuantę? Dla przykładu weźmy rozkład

$$P_X = \frac{1}{5}\delta_1 + \frac{1}{5}\delta_2 + \frac{1}{5}\delta_3 + \frac{1}{5}\delta_4 + \frac{1}{5}\delta_5.$$

Chyba nie będzie problemu poza samymi punktami 1, 2, 3, 4 i 5, ale przecież $F_X(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{5}$, $F_X(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{5}$ itd.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{5}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{5}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

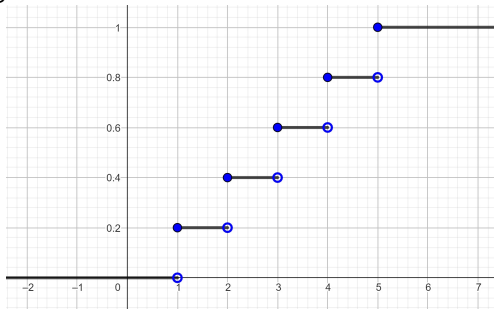
W nawiasie i w klamerkach x jest mały bo to liczba. Duży X jako indeks dolny przy F oznacza zmienną losową. Warto pisać tego X przy F bo potem będzie więcej zmiennych losowych naraz.

Jak narysować dystrybuantę?

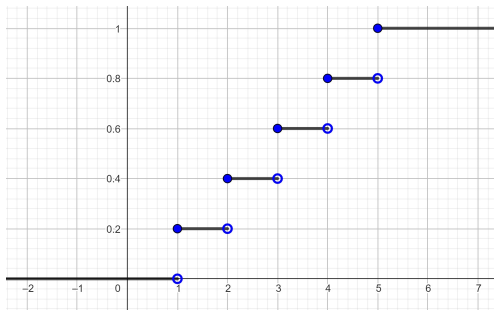
Rysowanie dystrybucy

Jak narysować dystrybucję?

Dla ostatniego rozkładu:

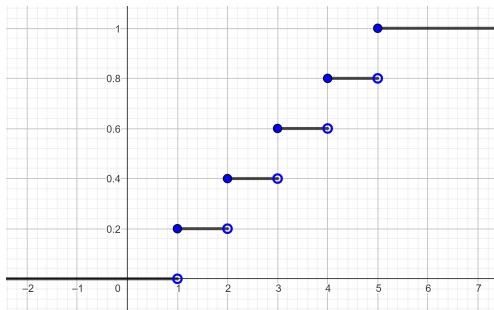


Rysowanie dystrybucji



Dla rozkładów dyskretnych to będą takie właśnie schodki.

Rysowanie dystrybucji



Dla rozkładów dyskretnych to będą takie właśnie schodki.
Domknięte po lewej, otwarte po prawej.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty?

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty? Można zapisać jako dystrybuanta w poprzednim punkcie, ale co jeśli punktów będzie nieskończenie wiele?

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty? Można zapisać jako dystrybuita w poprzednim punkcie, ale co jeśli punktów będzie nieskończenie wiele? Zawsze możemy użyć lewostronnej granicy: $P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$. Ale to trochę uciążliwe.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty? Można zapisać jako dystrybuantę w poprzednim punkcie, ale co jeśli punktów będzie nieskończenie wiele? Zawsze możemy użyć lewostronnej granicy: $P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$. Ale to

trochę uciążliwe. Dla uproszczenia wprowadzono nowy symbol

$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a - 0)$. Akurat odejmowanie zera było rzadko

używane :)

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty? Można zapisać jako dystrybuita w poprzednim punkcie, ale co jeśli punktów będzie nieskończenie wiele? Zawsze możemy użyć lewostronnej granicy: $P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$. Ale to

trochę uciążliwe. Dla uproszczenia wprowadzono nowy symbol $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a - 0)$. Akurat odejmowanie zera było rzadko

używane :) Można też używać taki: $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a^-)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty? Można zapisać jako dystrybuanta w poprzednim punkcie, ale co jeśli punktów będzie nieskończenie wiele? Zawsze możemy użyć lewostronnej granicy: $P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$. Ale to

trochę uciążliwe. Dla uproszczenia wprowadzono nowy symbol

$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a - 0)$. Akurat odejmowanie zera było rzadko

używane :) Można też używać taki: $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a^-)$. Czyli

teraz: $P(X < a) = F(a - 0)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Przypomnijmy, $P(X \leq a) = F(a)$ (na chwilę zrezygnuję z pisania X przy F). Ale jak policzyć $P(X < a)$?

$P(X < a) = P(X \leq a) - P(X = a)$. Ale jak to zapisać w języku dystrybuanty? Można zapisać jako dystrybuantę w poprzednim punkcie, ale co jeśli punktów będzie nieskończenie wiele? Zawsze możemy użyć lewostronnej granicy: $P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$. Ale to

trochę uciążliwe. Dla uproszczenia wprowadzono nowy symbol

$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a - 0)$. Akurat odejmowanie zera było rzadko

używane :) Można też używać taki: $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a^-)$. Czyli

teraz: $P(X < a) = F(a - 0)$. Albo $P(X < a) = F(a^-)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3)$.

b) $P(X < 3) = F_X(3^-)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3)$.

b) $P(X < 3) = F_X(3^-)$.

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3)$.

b) $P(X < 3) = F_X(3^-)$.

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3)$.

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3^-)$.

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3).$

b) $P(X < 3) = F_X(3^-).$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3).$

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3^-).$

e) $P(X \in (2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2).$

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3).$

b) $P(X < 3) = F_X(3^-).$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3).$

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3^-).$

e) $P(X \in (2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2).$

f) $P(X \in [2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X < 2) = F_X(4) - F_X(2^-).$

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3).$

b) $P(X < 3) = F_X(3^-).$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3).$

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3^-).$

e) $P(X \in (2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2).$

f) $P(X \in [2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X < 2) = F_X(4) - F_X(2^-).$

g) $P(X \in (2, 4)) = P(X < 4) - P(X \leq 2) = F_X(4^-) - F_X(2).$

Zamieniamy wszystko na dystrybuantę

Wszystkie przedziały możemy zapisać w języku dystrybuanty.

a) $P(X \leq 3) = F_X(3).$

b) $P(X < 3) = F_X(3^-).$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3).$

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3^-).$

e) $P(X \in (2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2).$

f) $P(X \in [2, 4]) = P(X \leq 4) - P(X < 2) = F_X(4) - F_X(2^-).$

g) $P(X \in (2, 4)) = P(X < 4) - P(X \leq 2) = F_X(4^-) - F_X(2).$

h) $P(X \in [2, 4)) = P(X < 4) - P(X < 2) = F_X(4^-) - F_X(2^-).$

Zaznaczamy na wykresie dystrybuanty

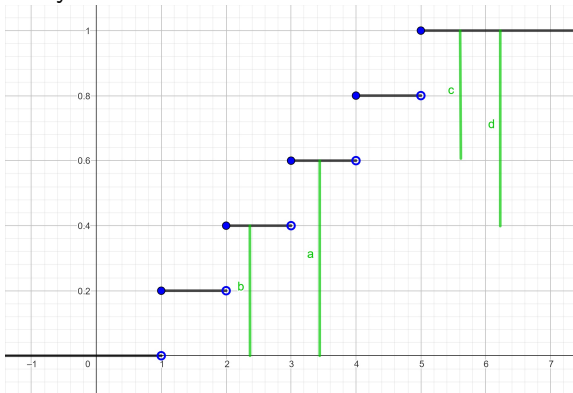
Teraz to naszkicujemy na wykresie dystrybuanty. Rysujemy jako odcinki o odpowiedniej długości.

Zaznaczamy na wykresie dystrybuanty

Teraz to naszkicujemy na wykresie dystrybuanty. Rysujemy jako odcinki o odpowiedniej długości. Swobodnie można przesuwać w lewo lub w prawo. Grunt, żeby wysokość była właściwa.

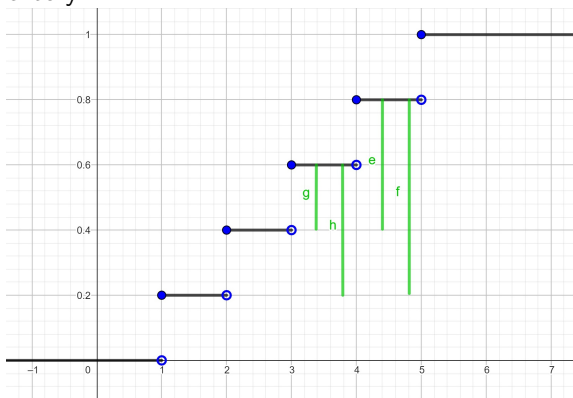
Zaznaczamy na wykresie dystrybucyjny

Pierwsze cztery:



Zaznaczamy na wykresie dystrybucyjny

I ostatnie cztery:



Powodzenia!
Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.