

Zestaw 7 - Funkcje zmiennych losowych

Artur Fortuna
AGH

Zakładamy, że znamy rozkład zmiennej losowej X .

Funkcje zmiennych losowych

Zakładamy, że znamy rozkład zmiennej losowej X . Ale dostaliśmy nową zmienną Y i ta zmienna powstała z X przez pewne przekształcenie.

Zakładamy, że znamy rozkład zmiennej losowej X . Ale dostaliśmy nową zmienną Y i ta zmienna powstała z X przez pewne przekształcenie.

$$Y = g(X)$$

Zakładamy, że znamy rozkład zmiennej losowej X . Ale dostaliśmy nową zmienną Y i ta zmienna powstała z X przez pewne przekształcenie.

$$Y = g(X)$$

Będziemy uczyli się jak znaleźć rozkład Y .

Zakładamy, że znamy rozkład zmiennej losowej X . Ale dostaliśmy nową zmienną Y i ta zmienna powstała z X przez pewne przekształcenie.

$$Y = g(X)$$

Będziemy uczyli się jak znaleźć rozkład Y . Nie będziemy zajmowali się przypadkiem gdy X jest dyskretny - tu wystarczy przeliczyć wartości. Zajmiemy się rozkładami ciągłymi.

Musimy znać:

- $F_X(x)$ - dystrybuantę X
- $g(x)$

Musimy znać:

- $F_X(x)$ - dystrybuantę X
- $g(x)$

Szukamy:

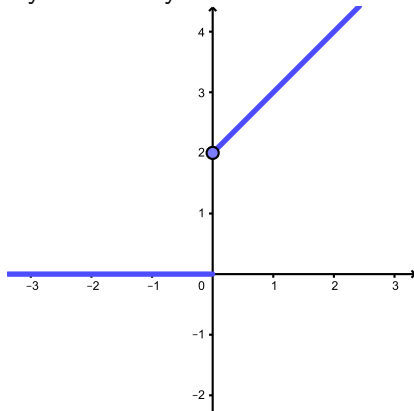
- $F_Y(x)$ - dystrybuanty Y

Dla przykładu niech będzie funkcja $g(X) = \begin{cases} X + 2, & X \geq 0 \\ 0, & X < 0 \end{cases}$.

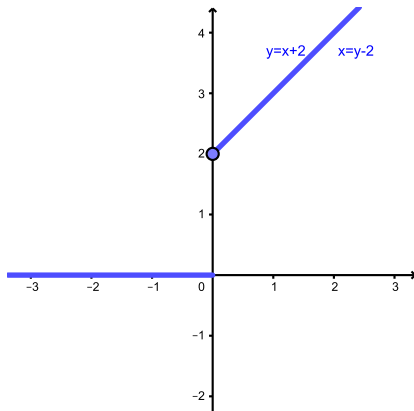
Funkcje zmiennych losowych II

Dla przykładu niech będzie funkcja $g(X) = \begin{cases} X + 2, & X \geq 0 \\ 0, & X < 0 \end{cases}$.

Zaczynamy od narysowania wykresu.

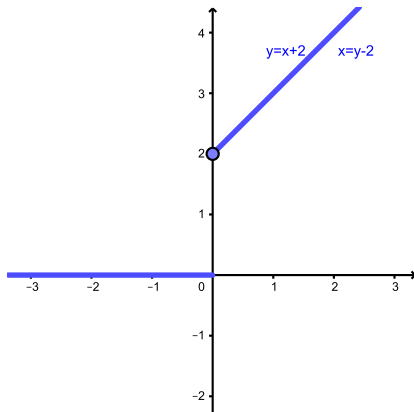


Funkcje zmiennych losowych



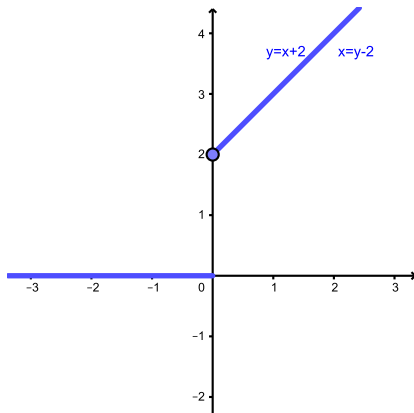
Kawałki wykresu (inne niż poziome) podpisujemy, ale ważne, również w postaci $x = \dots$.

Funkcje zmiennych losowych



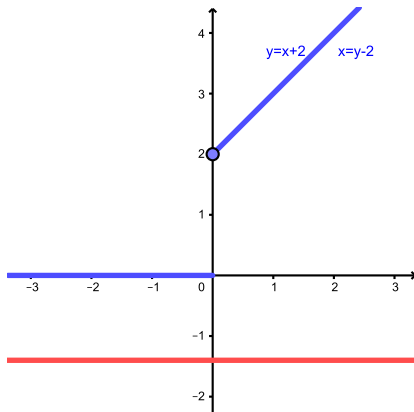
Teraz będziemy wyznaczać pewne zbiory I_y .

Funkcje zmiennych losowych



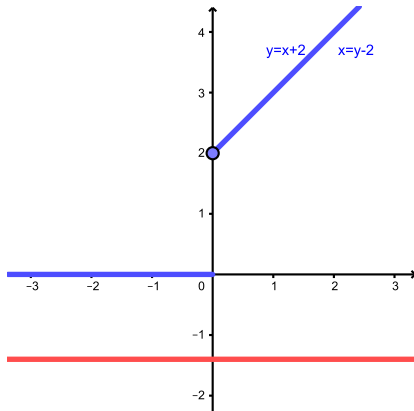
Co to jest I_y ? To zbiór wszystkich x , dla których wykres funkcji g jest poniżej danego y lub w tym samym miejscu.

Funkcje zmiennych losowych



Dla jakich x wykres g jest poniżej (czyli nie jest wyżej)?

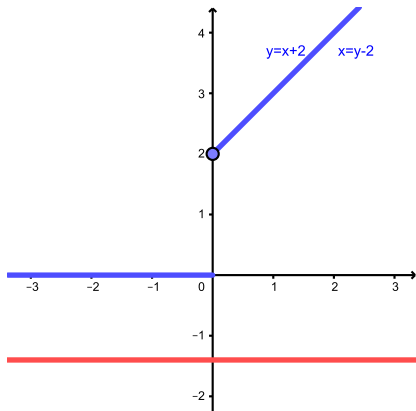
Funkcje zmiennych losowych



Dla jakich x wykres g jest poniżej (czyli nie jest wyżej)?

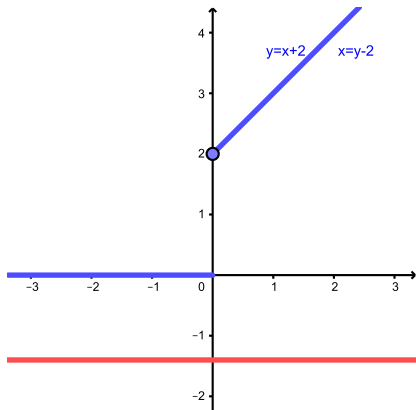
$\emptyset$.

Funkcje zmiennych losowych



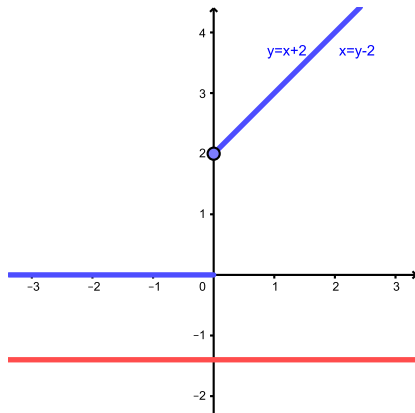
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię?

Funkcje zmiennych losowych



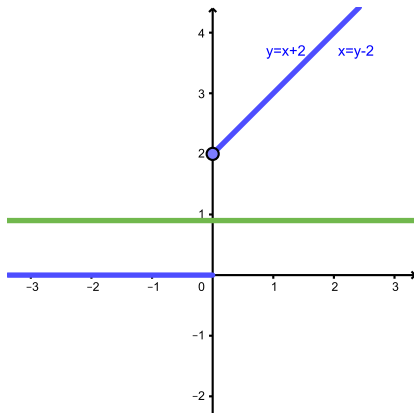
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię? $y \in (-\infty, 0)$.

Funkcje zmiennych losowych



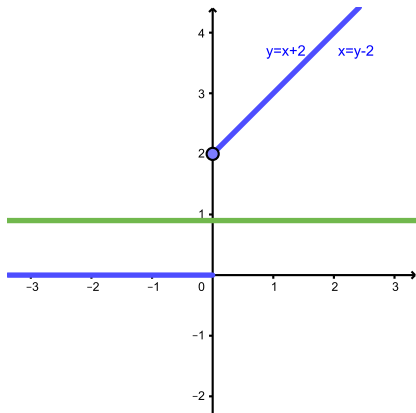
W takim razie $I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0) \\ \dots, & y \in \dots \\ \dots, & y \in \dots \end{cases}$

Funkcje zmiennych losowych



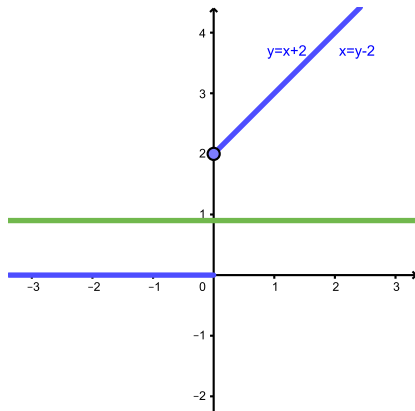
Dla jakich x wykres g nie jest wyżej tej linii?

Funkcje zmiennych losowych



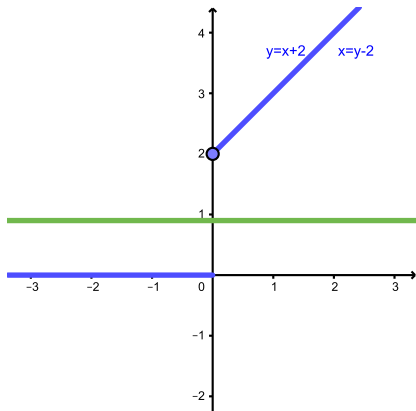
Dla jakich x wykres g nie jest wyżej tej linii?
 $(-\infty, 0)$.

Funkcje zmiennych losowych



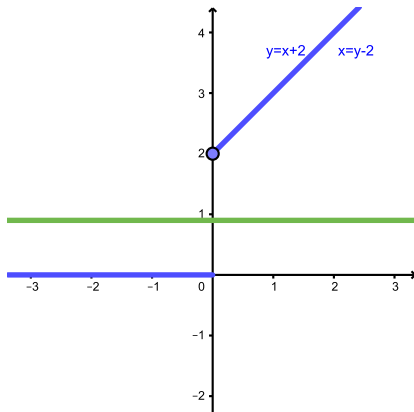
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię?

Funkcje zmiennych losowych



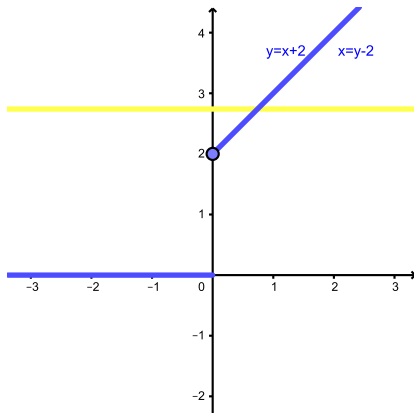
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię? $y \in [0, 2)$.

Funkcje zmiennych losowych



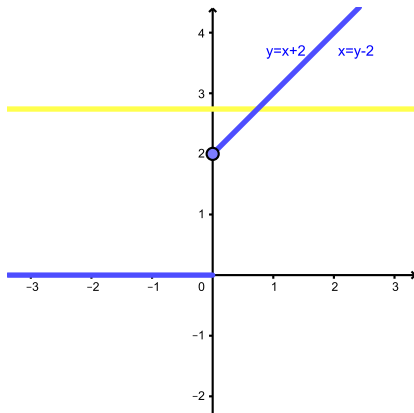
W takim razie $I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0) \\ (-\infty, 0), & y \in [0, 2) \\ \dots, & y \in \dots \end{cases}$

Funkcje zmiennych losowych



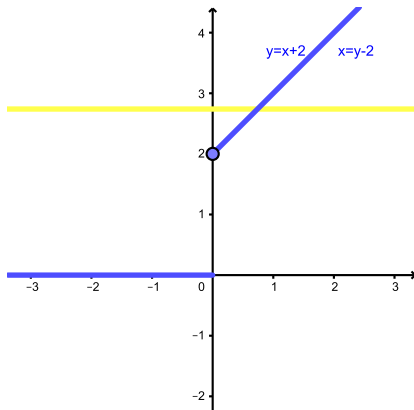
Dla jakich x wykres g nie jest wyżej tej linii?

Funkcje zmiennych losowych



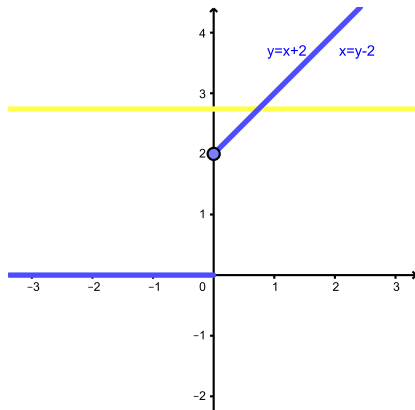
Dla jakich x wykres g nie jest wyżej tej linii?
 $(-\infty, y - 2]$.

Funkcje zmiennych losowych



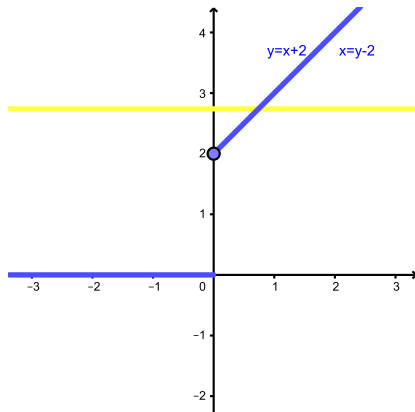
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię?

Funkcje zmiennych losowych



Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię? $y \in [2, +\infty)$.

Funkcje zmiennych losowych



W takim razie $I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0) \\ (-\infty, 0), & y \in [0, 2) \\ (-\infty, y-2], & y \in [2, +\infty) \end{cases}$

Żeby pójść dalej trzeba wiedzieć, że:

$$F_Y(y) = P(X \in I_y)$$

Przypomnijmy:

$$I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0) \\ (-\infty, 0), & y \in [0, 2) \\ (-\infty, y - 2], & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Przypomnijmy:

$$I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0) \\ (-\infty, 0), & y \in [0, 2) \\ (-\infty, y-2], & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

W takim razie:

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X \in \emptyset), & y \in (-\infty, 0) \\ P(X \in (-\infty, 0)), & y \in [0, 2) \\ P(X \in (-\infty, y-2]), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Przypomnijmy:

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X \in \emptyset), & y \in (-\infty, 0) \\ P(X \in (-\infty, 0)), & y \in [0, 2) \\ P(X \in (-\infty, y-2]), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Przypomnijmy:

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X \in \emptyset), & y \in (-\infty, 0) \\ P(X \in (-\infty, 0)), & y \in [0, 2) \\ P(X \in (-\infty, y-2]), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Czyli:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ F_X(0^-), & y \in [0, 2) \\ F_X(y-2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Aby pójść dalej potrzebujemy znać dystrybuantę X .

Aby pójść dalej potrzebujemy znać dystrybuantę X .

Na przykład:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \leq 2 \end{cases}.$$

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \leq 2 \end{cases} .$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ F_X(0^-), & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases} .$$

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \leq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ F_X(0^-), & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

$F_X(0^-)$ odczytujemy z wzoru (funkcja jest ciągła, więc ten minus nie ma żadnego znaczenia).

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \leq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ F_X(0^-), & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

$F_X(0^-)$ odczytujemy z wzoru (funkcja jest ciągła, więc ten minus nie ma żadnego znaczenia).

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} .$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases} .$$

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} .$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases} .$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem.

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in [2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in [0, +\infty)$.

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} .$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases} .$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in [2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in [0, +\infty)$. Który to będzie wzór w F_X ?

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in [2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in [0, +\infty)$. Który to będzie wzór w F_X ? Wzór II i III.

Funkcje zmiennych losowych

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in [2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in [0, +\infty)$. Który to będzie wzór w F_X ? Wzór II i III. W takim razie musimy dokonać podziału.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in [-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$y - 2 \in [0, +\infty)$$

$$y - 2 \in [0, 2) \quad \Bigg| \quad y - 2 \in [2, +\infty)$$

$$y \in [2, 4) \quad \Bigg| \quad y \in [4, +\infty)$$

wzór II

wzór III

Zbierzmy to razem

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ \frac{1}{3}(y - 2) + \frac{1}{3}, & y \in [2, 4) \\ 1, & y \in [4, +\infty) \end{cases}.$$

Zbierzmy to razem

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in [2, +\infty) \end{cases}$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in [0, 2) \\ \frac{1}{3}(y - 2) + \frac{1}{3}, & y \in [2, 4) \\ 1, & y \in [4, +\infty) \end{cases}.$$

A znając dystrybuantę możemy policzyć rozkład co robiliśmy już w zestawie 5.

Powodzenia!
Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.