

# Zestaw 9 - Centralne twierdzenie graniczne

Artur Fortuna  
AGH

# Centralne twierdzenie graniczne

Założmy, że mamy wiele razy ( $n$  razy) powtarzane doświadczenie o tym samym rozkładzie (oznaczymy je  $X_i$ ).

# Centralne twierdzenie graniczne

Założmy, że mamy wiele razy ( $n$  razy) powtarzane doświadczenie o tym samym rozkładzie (oznaczymy je  $X_i$ ). Te zdarzenia muszą być niezależne, tzn. ich wyniki nie mogą zależeć od wyniku innych doświadczeń. W zadaniach nie sprawdzamy tego, w zastosowaniach praktycznych trzeba mieć przekonanie, że niezależne są.

# Centralne twierdzenie graniczne

Założmy, że mamy wiele razy ( $n$  razy) powtarzane doświadczenie o tym samym rozkładzie (oznaczymy je  $X_i$ ). Te zdarzenia muszą być niezależne, tzn. ich wyniki nie mogą zależeć od wyniku innych doświadczeń. W zadaniach nie sprawdzamy tego, w zastosowaniach praktycznych trzeba mieć przekonanie, że niezależne są. Interesuje nas suma wyników zdarzeń.  $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ .

# Centralne twierdzenie graniczne

Na początek musimy wiedzieć (muszą być podane lub musimy policzyć sami) trzy rzeczy:

- $n$  - liczbę doświadczeń

# Centralne twierdzenie graniczne

Na początek musimy wiedzieć (muszą być podane lub musimy policzyć sami) trzy rzeczy:

- $n$  - liczbę doświadczeń
- $m$  - wartość oczekiwana pojedynczego zdarzenia  $X_i$

# Centralne twierdzenie graniczne

Na początek musimy wiedzieć (muszą być podane lub musimy policzyć sami) trzy rzeczy:

- $n$  - liczbę doświadczeń
- $m$  - wartość oczekiwana pojedynczego zdarzenia  $X_i$
- $\sigma$  - odchylenie standardowe pojedynczego zdarzenia  $X_i$

# Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć.

# Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ .

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400^-) - F_{S_n}(300).$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybucyjności.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400^-) - F_{S_n}(300)$ . Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

# Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybucyjności.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400^-) - F_{S_n}(300)$ . Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300).$$

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400^-) - F_{S_n}(300)$ . Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300)$ . Dystrybuanty  $S_n$  nie znamy, ale to nic bo teraz wkracza CTG.

# Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400^-) - F_{S_n}(300)$ . Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300)$ . Dystrybuanty  $S_n$  nie znamy, ale to nic bo teraz wkracza CTG.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300) \approx \Phi\left(\frac{400 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np.  $P(300 < S_n < 400)$ . Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400^-) - F_{S_n}(300)$ . Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300)$ . Dystrybuanty  $S_n$  nie znamy, ale to nic bo teraz wkracza CTG.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300) \approx \Phi\left(\frac{400 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

A że  $n$ ,  $m$  i  $\sigma$  znamy to zostało już tylko odczytać wynik z tablic.

# Centralne twierdzenie graniczne

Czasem w zadaniach nie znamy któregoś elementu (np.  $n$ ). Za to znamy wynik (np. prawdopodobieństwo jest równe albo większe lub równe niż ...).

# Centralne twierdzenie graniczne

Czasem w zadaniach nie znamy któregoś elementu (np.  $n$ ). Za to znamy wynik (np. prawdopodobieństwo jest równe albo większe lub równe niż ...). Postępujemy dokładnie tak jakbyśmy wszystko znali, stosujemy CTG i rozwiązujemy równanie szukając nieznanego parametru.

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

$$P(S_n \leq 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

$$P(S_n \leq 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

$$P(S_n \leq 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

$$P(S_n \leq 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0,99)$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

$$P(S_n \leq 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0,99)$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq 2,33$$

# Centralne twierdzenie graniczne

Np.  $m = 5$ ,  $\sigma = 2$  znajdź  $n$  takie, że  $P(S_n \leq 100) \geq 0,99$ .

$$P(S_n \leq 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0,99)$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq 2,33$$

A dalej już prosto, prawda?

I bardzo ważna uwaga. W praktyce CTG stosujemy, o ile:

$$n \geq 30$$

# Centralne twierdzenie graniczne

I bardzo ważna uwaga. W praktyce CTG stosujemy, o ile:

$$n \geq 30$$

Dla mniejszych nie, za duże błędy, trzeba sobie poradzić inaczej.

Powodzenia!

Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.