

**Zestaw 3 - Schemat Bernoulliego, niezależność zdarzeń,
prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite**

1. Grupa k obiektów kosmicznych jest obserwowana przez m stacji radiolokacyjnych. Każdy obiekt jest niezależnie od innych wykrywany przez daną stację z prawdopodobieństwem p . Oblicz prawdopodobieństwa, że:
 - a) co najmniej jeden obiekt zostanie wykryty
 - b) nie każda stacja wykryje wszystkie obiekty
 - c) losowo wybrana stacja wykryje n obiektów ($n \leq k$)
 - d) wszystkie obiekty zostaną wykryte
2. Zbadaj, który z układów przedstawionych poniżej ma większą niezawodność, przy założeniu, że zaznaczone tam przełączniki działają niezależnie i niezawodność każdego z nich wynosi p .



3. Uрна zawiera n kul, które są białe lub czarne, przy czym każda możliwa liczba kul białych jest tak samo prawdopodobna. Do urny wrzucono kulę białą, a następnie wylosowano jedną kulę. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, gdzie p_n oznacza prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.
4. Dozorca ma n kluczy, z których dokładnie jeden pasuje do zamka. Klucze są wybierane i próbowane losowo bez powtórzeń. Oblicz prawdopodobieństwa, że dozorca otworzy za pierwszą, drugą, trzecią, $\dots$, n -tą próbą.
5. Z trzech pracujących niezależnie elementów urządzenia dwa zawiodły. Prawdopodobieństwo ich awarii jest równe odpowiednio $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,4$. Znajdź prawdopodobieństwo tego, że zawiodły elementy drugi i trzeci.
6. W gimnazjum było n uczniów: n_1 w klasie I, n_2 w klasie drugiej i n_3 w klasie trzeciej. Wylosowano dwóch uczniów i okazało się, że jeden z nich jest w klasie wyższej niż drugi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uczeń z wyższej klasy jest klasie trzeciej?

7. W magazynie są produkty z trzech fabryk: I, II i III. Z fabryki I pochodzi 50% produktów, z II 30%, a z III 20%. Wady ma 1% produktów z fabryki I, 2% z fabryki II i 3% z fabryki III. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany produkt, który okazał się być bez wad jest z fabryki I?
8. Każdy test wykrywający chorobę ma dwa parametry: *czułość* i *swoistość*. Czuość to prawdopodobieństwo podania wyniku prawdziwie pozytywnego (czyli prawdopodobieństwa, że test wykryje chorobę u osoby chorej). Swoistość to prawdopodobieństwo uzyskania wyniku prawdziwie negatywnego (czyli prawdopodobieństwo, że test wykaże brak choroby u osoby zdrowej). Czuość pewnego testu na nowotwór piersi wynosi 90%, a swoistość 93%. Nowotwór ten atakuje 0,8% pacjentek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjentka, u której test wykrył nowotwór piersi naprawdę go ma?
9. Wiadomo, że w pewnej fabryce 10% produkcji jest wadliwie. Dział kontroli popełnia jednak błędy. Z prawdopodobieństwem 5% uznaje, że element wadliwy jest dobry, a z prawdopodobieństwem 2% uznaje element dobry za wadliwy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że element uznany za dobry jest dobry?
10. Średnio na 100 mężczyzn pięciu, a na 1000 kobiet dwie nie rozróżniają kolorów. Z grupy o jednakowej liczebności obu płci wybrano losowo osobę, która okazała się daltonistą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrano mężczyznę?
11. Państwo Nowakowie mają dwoje dzieci. Na zdjęciu widzisz jedno z nich - to córka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugie z nich jest chłopcem?
12. W pewnym teleturnieju nagroda jest ukryta za jedną z trzech bramek: A, B lub C (z równym losowym prawdopodobieństwem). Wybrałeś losowo A. Prowadzący program pokazał Ci, że za bramką C nie ma nagrody. Pyta czy chcesz zmienić swój wybór na B czy pozostać przy A. Jak decyzja daje Ci większą szansę na wygraną?
13. W więzieniu w osobnych celach bez możliwości komunikacji między sobą przebywa trzech więźniów: Jan, Łukasz i Mateusz. Następnego dnia rano dwaj z nich (wybrano ich losowo) zostaną straceni, a trzeci uwolniony. Strażnikom nie wolno żadnego z więźniów informować przed czasem czy zginie czy przeżyje. Jan zapytał zatem strażnika o imię jednej z osób, które zostaną stracone nazajutrz i zyskał odpowiedź "Mateusz". Jan ucieszył się, bo uznał, że teraz jego szanse na przeżycie wzrosły z $\frac{1}{3}$ na $\frac{1}{2}$. Czy Jan ma rację?