

Zestaw 5 - Rozkłady ciągłe i mieszane

Artur Fortuna
AGH

Rozkład ciągły prawdopodobieństwa dla jednej zmiennej można sobie wyobrażać jak oś OX (albo jej kawałek lub kawałki) która w różnych miejscach jest wykonana z różną gęstością, ale w sumie waży 1.

Rozkład ciągły prawdopodobieństwa dla jednej zmiennej można sobie wyobrazić jak oś OX (albo jej kawałek lub kawałki) która w różnych miejscach jest wykonana z różną gęstością, ale w sumie waży 1. Zapisujemy go w ten sposób:

$$P_X = f \cdot \mathcal{L}$$

Rozkład ciągły prawdopodobieństwa dla jednej zmiennej można sobie wyobrazić jak oś OX (albo jej kawałek lub kawałki) która w różnych miejscach jest wykonana z różną gęstością, ale w sumie waży 1. Zapisujemy go w ten sposób:

$$P_X = f \cdot \mathcal{L}$$

$\mathcal{L}$ to symbol **miary Lebesgue'a**, takiej miary odpowiadającej temu w jaki sposób normalnie mierzymy długość, pole czy objętość. Jest tu by nie zajmować się dziwnymi matematycznymi tworam, których miary nie potrafimy podać. Nie będzie miała praktycznych zastosowań - ma być napisana i tyle :).

Symbol f to właśnie gęstość.

Symbol f to właśnie **gęstość**. Każdy rozkład ciągły ma jakąś konkretną gęstość, ale możemy popatrzeć na to z drugiej strony: czy każda funkcja może być gęstością?

Symbol f to właśnie **gęstość**. Każdy rozkład ciągły ma jakąś konkretną gęstość, ale możemy popatrzeć na to z drugiej strony: czy każda funkcja może być gęstością? Okazuje się, że muszą być spełnione dwa warunki. Pierwszy jest oczywisty: f musi być nieujemna.

Symbol f to właśnie **gęstość**. Każdy rozkład ciągły ma jakąś konkretną gęstość, ale możemy popatrzeć na to z drugiej strony: czy każda funkcja może być gęstością? Okazuje się, że muszą być spełnione dwa warunki. Pierwszy jest oczywisty: f musi być nieujemna. Od rozkładów dyskretnych żądaliśmy by sumowały się do 1. A co jest odpowiednikiem sumy w takim ciągłym przypadku?

Gęstość prawdopodobieństwa

Symbol f to właśnie **gęstość**. Każdy rozkład ciągły ma jakąś konkretną gęstość, ale możemy popatrzeć na to z drugiej strony: czy każda funkcja może być gęstością? Okazuje się, że muszą być spełnione dwa warunki. Pierwszy jest oczywisty: f musi być nieujemna. Od rozkładów dyskretnych żądaliśmy by sumowały się do 1. A co jest odpowiednikiem sumy w takim ciągłym przypadku? Tak, całka. Zatem drugi warunek to:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

W takim rozkładzie ciągłym nie ma sensu liczyć prawdopodobieństwa w pojedynczych punktach (bo jest równe 0).

W takim rozkładzie ciągłym nie ma sensu liczyć prawdopodobieństwa w pojedynczych punktach (bo jest równe 0). Możemy za to liczyć prawdopodobieństwa dla przedziałów.

W takim rozkładzie ciągłym nie ma sensu liczyć prawdopodobieństwa w pojedynczych punktach (bo jest równe 0). Możemy za to liczyć prawdopodobieństwa dla przedziałów.

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f(x) dx$$

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Czyli

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Czyli

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Zwykle piszemy ten wzór dla x (tzn $F_X(x)$), a zmienna całkowa to wtedy t .

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Czyli

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Zwykle piszemy ten wzór dla x (tzn $F_X(x)$), a zmienna całkowa to wtedy t .

Dystrybuanta rozkładu dyskretnego zaczynała się od 0, a dochodziła do 1. Dla rozkładów ciągłych tak być nie musi.

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Czyli

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Zwykle piszemy ten wzór dla x (tzn $F_X(x)$), a zmienna całkowa to wtedy t .

Dystrybuanta rozkładu dyskretnego zaczynała się od 0, a dochodziła do 1. Dla rozkładów ciągłych tak być nie musi. Wystarczy by dążyła do 0 w $-\infty$, a do 1 w $+\infty$.

Dystrybuanta rozkładów ciągłych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ta sama definicja.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Czyli

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Zwykle piszemy ten wzór dla x (tzn $F_X(x)$), a zmienna całkowa to wtedy t .

Dystrybuanta rozkładu dyskretnego zaczynała się od 0, a dochodziła do 1. Dla rozkładów ciągłych tak być nie musi. Wystarczy by dążyła do 0 w $-\infty$, a do 1 w $+\infty$. Nadal jest niemalejąca.

Rozkład mieszany prawdopodobieństwa to kombinacja rozkładu dyskretnego i ciągłego.

Rozkład mieszany prawdopodobieństwa to kombinacja rozkładu dyskretnego i ciągłego.

$$P_X = \alpha P_D + \beta P_C$$

Oczywiście $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$ i $\alpha + \beta = 1$.

Rozkład mieszany prawdopodobieństwa to kombinacja rozkładu dyskretnego i ciągłego.

$$P_X = \alpha P_D + \beta P_C$$

Oczywiście $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$ i $\alpha + \beta = 1$. P_D to **część dyskretna** rozkładu mieszanego, a P_C to jego **część ciągła**.

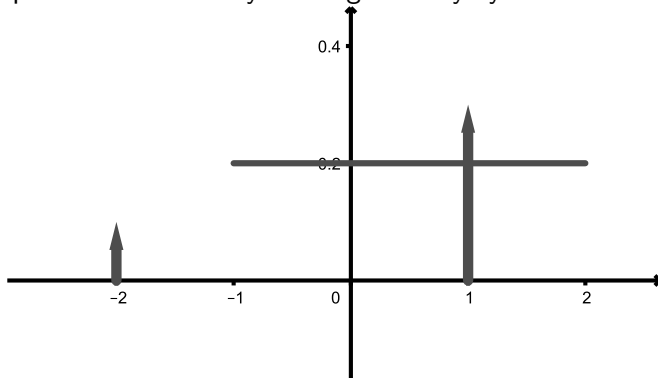
Rozkład mieszany prawdopodobieństwa to kombinacja rozkładu dyskretnego i ciągłego.

$$P_X = \alpha P_D + \beta P_C$$

Oczywiście $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$ i $\alpha + \beta = 1$. P_D to **część dyskretna** rozkładu mieszanego, a P_C to jego **część ciągła**. Te nazwy są nieco mylące, to nie są tak do końca części. To pełnoprawne rozkłady (w szczególności sumują się czy odpowiednio całkują do 1). Rozkłady, które zmieszano w odpowiednich proporcjach by powstał rozkład mieszany.

Rozkłady mieszane

Przy rysowaniu rozkładu szkicujemy funkcję gęstości, a prawdopodobieństwa dla dyskretnego znaczymy strzałkami.



Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ten sam wzór.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ten sam wzór.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Jak to liczymy w praktyce?

Dystrybuanta rozkładów mieszanych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ten sam wzór.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Jak to liczymy w praktyce? Tam gdzie jest ciągły całkujemy, a tam gdzie jest dyskretny sumujemy.

Dystrybuanta rozkładów mieszanych

Dla dystrybuanty nadal obowiązuje ten sam wzór.

$$F_X(a) = P(X < a)$$

Jak to liczymy w praktyce? Tam gdzie jest ciągły całkujemy, a tam gdzie jest dyskretny sumujemy.

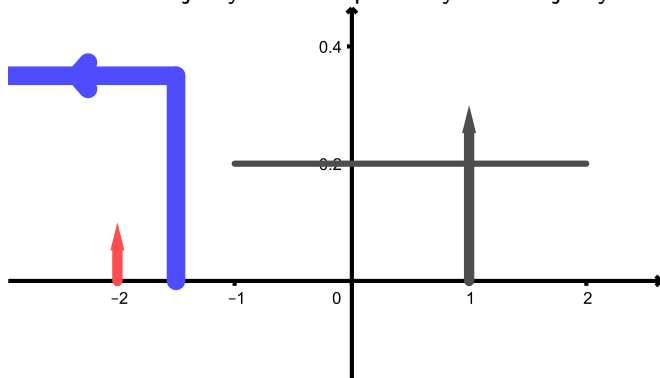
Popatrzmy na przykładzie.

Dystrybuanta rozkładów mieszanych

Niebieska strzałka pokazuje zakres objęty dystrybucją, a na czerwono to co sumujemy i obszar po którym całkujemy.

Dystrybuanta rozkładów mieszanych

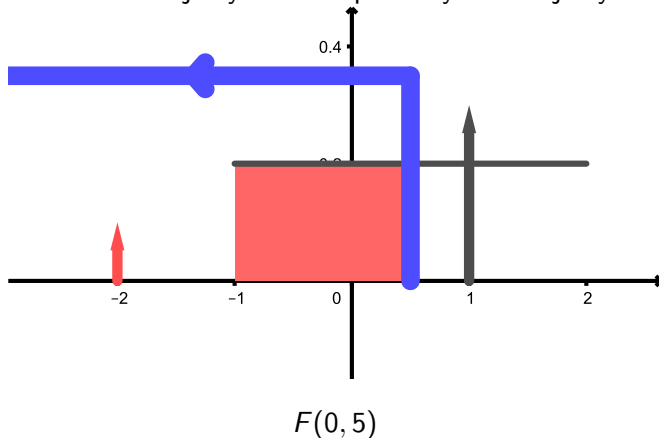
Niebieska strzałka pokazuje zakres objęty dystrybuantą, a na czerwono to co sumujemy i obszar po którym całkujemy.



$$F(-1, 5)$$

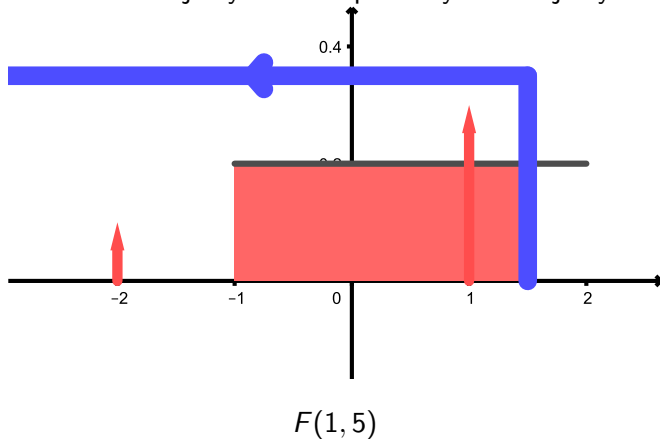
Dystrybuanta rozkładów mieszanych

Niebieska strzałka pokazuje zakres objęty dystrybuantą, a na czerwono to co sumujemy i obszar po którym całkujemy.



Dystrybuanta rozkładów mieszanych

Niebieska strzałka pokazuje zakres objęty dystrybuantą, a na czerwono to co sumujemy i obszar po którym całkujemy.



Jeśli mamy podaną dystrybuantę, a mamy policzyć rozkład to jest to możliwe.

Jeśli mamy podaną dystrybuantę, a mamy policzyć rozkład to jest to możliwe.

- Zawsze zakładamy, że mamy do czynienia z rozkładem mieszanym (najwyżej, któreś części nie będzie).

Liczenie rozkładu z dystrybuanty

Jeśli mamy podaną dystrybuantę, a mamy policzyć rozkład to jest to możliwe.

- Zawsze zakładamy, że mamy do czynienia z rozkładem mieszanym (najwyżej, któreś części nie będzie).
- Najpierw liczymy skoki tzn. $F(a^+) - F(a)$ (w tych punktach gdzie zmienia się wzór klamerekowy lub są jakieś punkty nieciągłości). Tak znajdziemy część dyskretną.

Liczenie rozkładu z dystrybuanty

Jeśli mamy podaną dystrybuantę, a mamy policzyć rozkład to jest to możliwe.

- Zawsze zakładamy, że mamy do czynienia z rozkładem mieszanym (najwyżej, któreś części nie będzie).
- Najpierw liczymy skoki tzn. $F(a^+) - F(a)$ (w tych punktach gdzie zmienia się wzór klamerekowy lub są jakieś punkty nieciągłości). Tak znajdziemy część dyskretną.
- A teraz już wystarczy policzyć pochodną czyli $F'(x)$. Tak znajdziemy gęstość części ciągłej.

Powodzenia!
Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.